

中国科学院研究生院

基础空间等离子体物理学 (上册)

陈涛编写

2010, 2

本课程讲义分上、下两册, 由ppt文件直接打印装订成册.

上册由陈涛编写, 内容包括:

导论 等离子体的基本概念

第一部分 单粒子轨道理论

第二部分 磁流体力学理论

下册黄建国编写, 内容包括:

第三部分 等离子体动理学理论

注1: plasma一词在物理学领域翻译成等离子体 (大陆学者), 或电浆 (台湾学者)。

注2: 以前一些书刊中把kinetic theory翻译成动力论, 容易混淆dynamic和kinetic两词的物理区别。Dynamic (动力的) 一词用在描述与力有关的过程, 而kinetic描述与粒子运动速度有关的过程。为了区分它们, 后来国家标准词条把kinetic theory重新翻译成动理学理论, 简称动理论。本课程中我们采用动理学理论 (或动理论) 的翻译名称。

主要参考书目:

- [1] W. Baumjohann and R. A. Treumann, *Basic Space Plasma Physics*, Imperial College Press, 1997
- [2] R. A. Treumann and W. Baumjohann , *Advanced Space Plasma Physics*, Imperial College Press, 1997
- [3] G. K. Parks, *Physics of Space Plasmas: An Introduction*, Second Edition: Westview Press, A Member of the Perseus Books Group, 2004
- [4] Paul M. Bellan, *Fundamentals of Plasma Physics*, Cambridge University Press, 2006
- [5] T.J.M.Boyd and J.J.Sanderson, *The Physics of Plasmas*, Cambridge University Press, 2003
- [6] 徐家鸾, 金尚宪, 等离子体物理学, 原子能出版社, 1981
- [7] 国家自然科学基金委员会, 等离子体物理学, 科学出版社, 1994
- [8] 胡希伟, 等离子体理论基础, 北京大学出版社, 2006
- [9] 李 定, 陈银华, 马锦秀, 杨维紘, 等离子体物理学, 高等教育出版社, 2006
- [10] 康寿万, 陈雁萍, 等离子体物理学手册, 科学出版社, 1981
- [11] 吴望一, 流体力学, 北京大学出版社, 1 9 8 2

上册目录:

导论	等离子体的基本概念	3
第一部分	单粒子轨道理论	28
第一章	单粒子在外加电磁场中的运动	28
第二章	捕获粒子	53
第二部分	磁流体力学理论	70
第一章	磁流体力学基本理论	71
第二章	等离子体波的磁流体理论	126
第三章	磁流体力学激波	189
第四章	磁流体力学不稳定性	219
第五章	磁场重联（补充内容）	255

导论 等离子体的基本概念

- 等离子体的定义
- 等离子体物理研究的几个相对独立的领域
- 等离子体物理研究的基本问题
- 等离子体物理的三种理论描述方法
- 等离子体的几个基本参数
- 碰撞
- 等离子体电导率

● 等离子体的定义

等离子体是由大量正、负电荷数相等的带电粒子组成的非凝聚系统。

等离子体状态是物质存在的基本形态之一，与固态、液态和气态并列，称为物质的第四态。宇宙中的大部分物质处于等离子体状态，人造等离子体在科学技术中的重要性正在迅速提高。

等离子体物理学研究等离子体的基本运动规律。等离子体的主要特征是：粒子间存在长程库仑（Coulomb）相互作用。等离子体的运动与电磁场的运动紧密耦合，存在极其丰富的集体效应（collective effect）和集体运动模式。等离子体物理学以等离子体的整体形态和集体运动规律、等离子体与电磁场及其他形态物质的相互作用为主要研究对象。

与物质的另外三态相比，等离子体可以存在的参数范围异常宽广（其密度、温度和磁场强度都可以跨越十几个数量级）；等离子体的形态和性质受外加电磁场的强烈影响，并存在极其丰富的集体运动模式（如各种静电波、漂移波、电磁波及非线性的相干结构和湍流）；此外，等离子体对边界条件还十分敏感。因此，等离子体性质的研究强烈地依赖于具体的研究对象。

● 等离子体物理研究的几个相对独立的领域

当今等离子体物理研究主要集中在以下几个相对独立的领域：

- *热核聚变能源研究（高温碰撞等离子体）
- *空间等离子体物理（低温无碰撞等离子体）和天体等离子体物理（各种极端参数条件下的等离子体）
- *气体放电和电弧的工业应用（低温等离子体及其与物质相互作用）
- *强流带电粒子束的现代高科技应用（非中性等离子体及其与强静电、电磁波场的相互作用）。

《空间等离子体物理学》：在日地空间和整个日层空间发生的大多数物理过程是等离子体物理过程，对其中基础性的和共性的现象与规律的研究就形成了一门新的学科分支——空间等离子体物理学。目前从整体上看它主要还是研究日地及日层空间中的等离子体物理现象。它既是等离子体物理学的一个分支，也是空间物理学的一个分支，是空间物理、太阳物理和等离子体物理之间的交叉学科，具有其独特的地位和作用。

● 等离子体物理研究的基本问题：

- * 等离子体平衡位形

- * 波动和不稳定性

- * 电磁辐射

- * 弛豫和输运

● 等离子体物理的三种理论描述方法：单粒子（或试探粒子）轨道理论，磁流体力学理论，和动理学理论。

* 单粒子（或试探粒子）轨道理论。它直接对大量带电粒子的集合作轨道描述，由于存在多粒子间的相互作用，此问题只能用计算机求解。但在许多情况下，可以先忽略粒子间的相互作用，把多体问题简化成单个试探粒子在给定的外加电磁场中的轨道运动。这虽然是电动力学问题，但由于在日-地空间或某些实验装置中的电磁场位形往往非常复杂，故又专门发展了一些有效的简化方法（如强磁场中的引导中心漂移近似，高频电磁场中的振荡中心近似等），统称为单粒子（或试探粒子）轨道理论，是等离子体的一种近似理论。在许多等离子体物理问题中，试探粒子的轨道描述往往可以对等离子体的行为作出更严格的零级近似。

由于忽略了粒子间的相互作用，这种理论不能用来研究涉及波-粒子相互作用的现象，也不能揭示因粒子体系分布函数在速度空间中偏离平衡态所引起的等离子体不稳定性。

适用条件要求等离子体必须很稀薄。

*磁流体力学理论。它把等离子体当成导电流体来描述（单流体力学），把不同种类的带电粒子（如电子和离子）分别用不同的导电流体来描述（双流体力学），它也是等离子体的一种近似理论。它适用于描述随时间和空间变化的一些等离子体行为，如在给定的电、磁场中的平衡位形，低频的稳定的集体运动（磁流体力学波）和不稳定的集体运动（宏观或磁流体力学不稳定性），双流体理论还可以描述高频波及各种粒子的输运过程。

由于它不考虑同一流体元中不同粒子间运动的差别，因而也不能用来研究涉及波-粒子相互作用的现象，不能揭示因粒子体系分布函数在速度空间中偏离平衡态所引起的等离子体不稳定性。

适用条件要求等离子体的特征长度和特征时间必须大于粒子碰撞的平均自由程和平均时间。在磁化等离子体中要求等离子体垂直于磁场的特征长度和特征时间必须远大于粒子的回旋半径和回旋周期。

***动理学理论（或统计描述的理论）。它把等离子体看成是由大量带电粒子组成的一个集团，应用统计物理的方法来研究这团粒子的集体行为，即大量带电粒子的统计平均结果，是等离子体的统计理论。它是求解以各种粒子的速度分布函数的时间演化方程为手段的理论，包括无碰撞等离子体中波和粒子间相互作用的Vlasov波动理论和碰撞等离子体中碰撞过程的动理学理论。它比单粒子轨道理论和磁流体力学理论都完整，但数学上要复杂得多，缺少物理直观性。**

等离子体是由正、负电荷数相等的带电粒子组成的系统，粒子之间有近距离的短程二体碰撞作用和远距离的长程电磁力作用。等离子体中粒子的密度要求相对足够的低，以使得短程二体碰撞作用可以忽略，而长程电磁力作用更有效。等离子体的性质由带电粒子的单个相互作用和粒子的“集体行为” (collective behavior) 来确定。这种“集体行为”是由许多粒子通过长程库仑势 (Coulomb potential) 同时相互作用产生的。集体相互作用最好用统计物理的概念来描述，因而要求等离子体系统应包含足够多的粒子数目。

《计算等离子体物理》：它是从一定的物理模型出发，用计算机作数值计算或模拟，以揭示等离子体的某些性质和运动规律，是计算物理的一个重要分支。由于等离子体是自由度十分巨大的体系，物理现象极为丰富又极为复杂，计算等离子体物理显得愈来愈重要。相应于等离子体的磁流体描述、统计描述和粒子轨道描述，计算等离子体物理大体分为磁流体研究、动理学研究和粒子模拟三个方面。磁流体研究和动理学研究分别在三维坐标空间和六维相空间（坐标与速度）对等离子体作连续介质描述，它们分别对磁流体方程组和 Vlasov-Maxwell 方程组求数值解。而粒子模拟则是跟踪每一个粒子在外加电磁场和自己产生的自洽电磁场中的轨道运动，研究粒子系和自洽波场之间的共振相互作用及其非线性的时间演化过程。

● 等离子体物理的几个基本参数：

* 德拜屏蔽 (Debye shielding) 和德拜长度 (Debye length)
一个电荷为 q 的粒子在距离为 r 处的静电库仑势 (Coulomb potential) 为 $\phi_C = q / (4\pi\epsilon_0 r)$ 。

在等离子体中，一些电子被吸引到离子附近，将离子的静电场与等离子体的其余部分屏蔽开来。同样，一个静止的电子会排斥其它电子而吸引离子。这样，一个带电粒子的静电作用被其周围过剩的异号电荷所屏蔽，这种效应改变了带电粒子附近的静电势分布，使得静电场被限制在一个短距离内，称为德拜屏蔽(Debye shielding)。因此，一个静止电荷的静电势可以写成为一个短程静电势形式

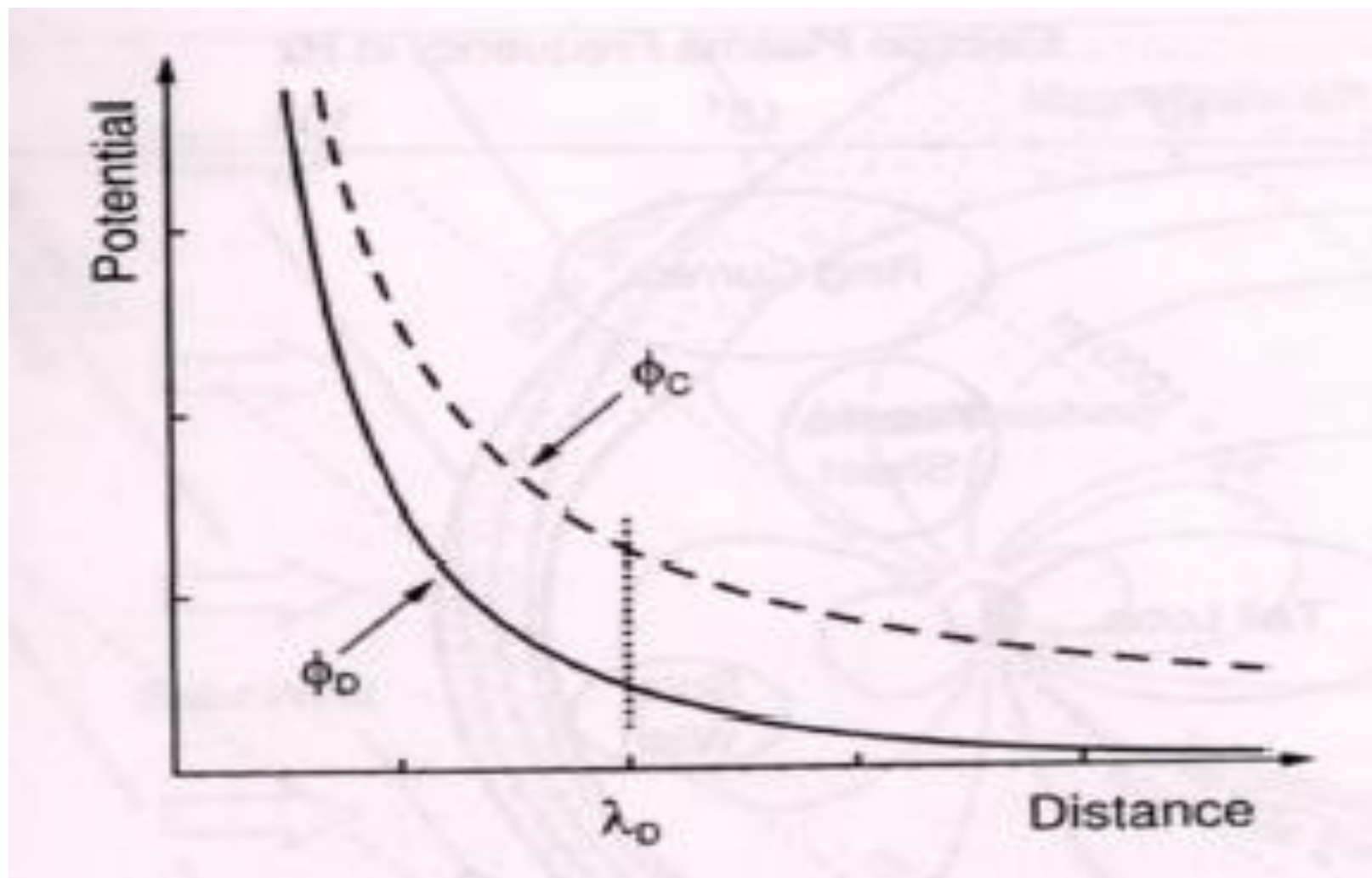
$$\phi_D = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) = \phi_c \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right),$$

把 ϕ_D 称为德拜势 (Debye potential)，其中 λ_D 被称为德拜长度 (Debye length)，它是粒子电势下降到Coulomb势的 $1/e$ 倍时的距离，定义为(以后将给出严格的计算)

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{e^2 n_0}}$$

.....(1)

图1 Debye势和Coulomb势的比较



当 $r \ll \lambda_D$ 时, 电势简化为简单的Coulomb势; 当 $r > \lambda_D$ 时, 电势指数下降, 点电荷周围的电势被有效地屏蔽, 称为Debye屏蔽(Debye shielding)。可见, Debye长度是等离子体中一个试验电荷作用范围的量度, 短程静电势是由等离子体的动理学性质确定的。图1表示Debye势和Coulomb势的比较。

*等离子体的电中性

等离子体在宏观上是电中性的, 满足电中性条件:

$$n_e = \sum_i Z_i n_i \dots\dots\dots(2)$$

其中 n_e 和 n_i 是电子和离子的数密度, Z_i 是离子电荷数。该条件只有在Debye长度之外的区域才满足。为了使稳态等离子体维持准电中性, 每个体积元内的正、负电荷数必须相等, 这样的体积元必须足够大以便包含足够多的粒子, 但又必须足够小以便小于宏观参量变化的特征长度(或系统的特征长度, 或系统的物理尺度)。在每个体积元内粒子的微观空间电荷场必须互相抵消以保持宏观电中性。

因此，等离子体系统的物理尺度 L 必须大于Debye长度 λ_D ，

$$\boxed{\lambda_D \ll L} \dots\dots\dots (3)$$

这是等离子体不同于简单电离气体的第一个判据。

*等离子体参量

由于屏蔽效应是半径为 λ_D 的Debye球内集体行为的结果，该球必须包含足够多的粒子。Debye球内的粒子数为 $(4\pi/3)n_e\lambda_D^3$ ，其中 $n_e\lambda_D^3 \equiv \Lambda$ 常被称为等离子体参量，于是定义等离子体的第二个判据为

$$\boxed{\Lambda = n_e\lambda_D^3 \gg 1} \dots\dots\dots (4)$$

由于粒子间两两相互作用位能的平均值为

$$P \sim q_1q_2 / (\varepsilon_0 \bar{r}) \sim n^{1/3} q_1q_2 / \varepsilon_0$$

其中 $\bar{r}$ 为粒子间的平均距离。而粒子的平均动能为

$$W = mv_{th}^2 / 2 = k_B T_e$$

于是平均动能与平均位能的比值与等离子体参量的 $2/3$ 次方有如下关系：

$$\frac{W}{P} \sim \frac{T_e}{n^{1/3}} \sim \Lambda^{2/3} \gg 1$$

也就是说，等离子体的第二个判据要求粒子的平均动能必须远大于平均位能，即粒子间两两相互作用位能与其动能相比可忽略不计，于是等离子体可以近似看作“无碰撞”，第二个判据也就是等离子体无碰撞条件。等离子体就其整体而言，动能和位能是平均分配的，但粒子的相互作用位能都集中于Debye球内的多体相互作用，粒子间的两两相互作用分配到的能量是极少的。可见，等离子体的无碰撞正是Debye球内的多体相互作用的结果。条件

$$\Lambda \sim \left(\lambda_D / \bar{r} \right)^3 \gg 1$$

也表明，Debye长度远大于粒子平均距离，粒子大部分时间都处在Debye球内。

*等离子体振荡和等离子体频率

等离子体维持宏观电中性的趋势非常强烈。如果等离子体电中性受到某种外力的扰动，使一群电子稍微偏离它们的平衡位置，那么这群电子就会受到一种使它们返回到原来位置的恢复力的作用。当达到平衡位置时，它们将获得和初始位移的势能相等的动能，并将继续通过平衡位置向前运动，直到全部动能转变为势能为止。这种周期性振荡运动的现象称为等离子体振荡，是等离子体中一种天然的振荡，其振荡频率就是等离子体频率。以后将证明，等离子体频率为

$$\omega_{pe} = \left(\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0} \right)^{1/2} \dots\dots\dots(5)$$

它常被用来确定等离子体中电子的密度。某些空间等离子体，如地球电离层，是不完全电离的，带电粒子常与中性成分碰撞，介质并不像等离子体，而像中性气体。若电子仍然不受与中性成分碰撞影响，电子与中性粒子两次碰撞之间的平均时间 τ_n 必须大于等离子体频率的倒数，即满足条件

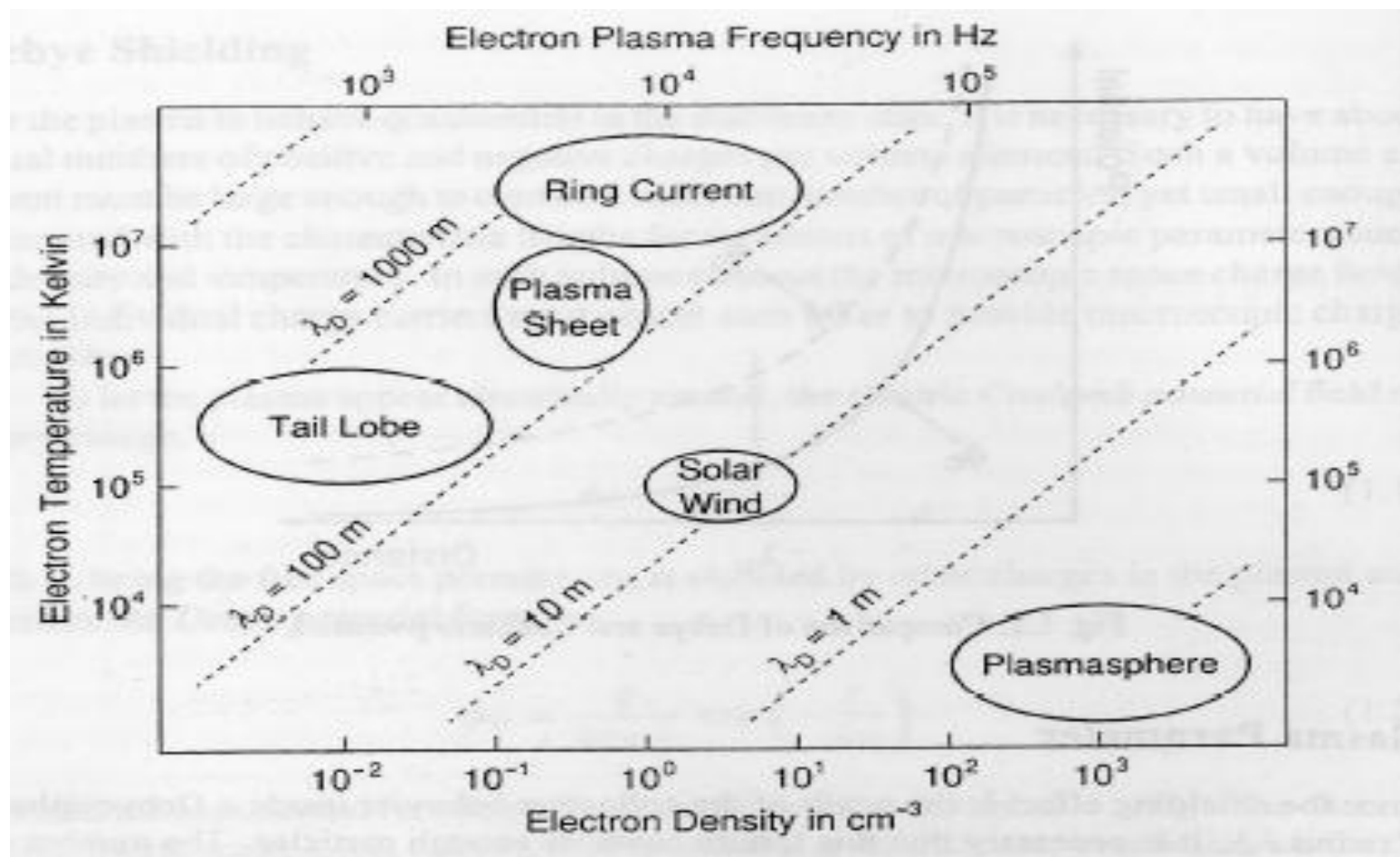
$$\boxed{\omega_{pe} \tau_n \gg 1} \dots\dots\dots(6)$$

这是把部分电离介质当作等离子体的第三个判据。

上述表明，等离子体粒子间的长程相互作用在近距离和远距离分别产生了两种重要效应。在小于Debye长度的尺度内，粒子的近距离作用造成Debye屏蔽，从而保证了无碰撞条件。在大于Debye长度的尺度范围内，粒子的远距离作用产生了等离子体的集体效应(collective effect)。“集体效应”一词专指大于Debye长度的现象，尽管Debye屏蔽实质上也是集体作用的结果。

图2给出几个地球空间等离子体区域中典型的参数范围,如密度和温度,因而也表示出Debye长度的分布.可见,在大多数地球物理等离子体中，天然条件保证了Debye屏蔽的实现，从而展现出丰富的集体效应。但在计算机粒子模拟中，需用大量的粒子来实现Debye屏蔽，这是一个难以完全克服的困难。

图2 几个地球空间等离子体中典型的参数范围



<<地球物理等离子体>>

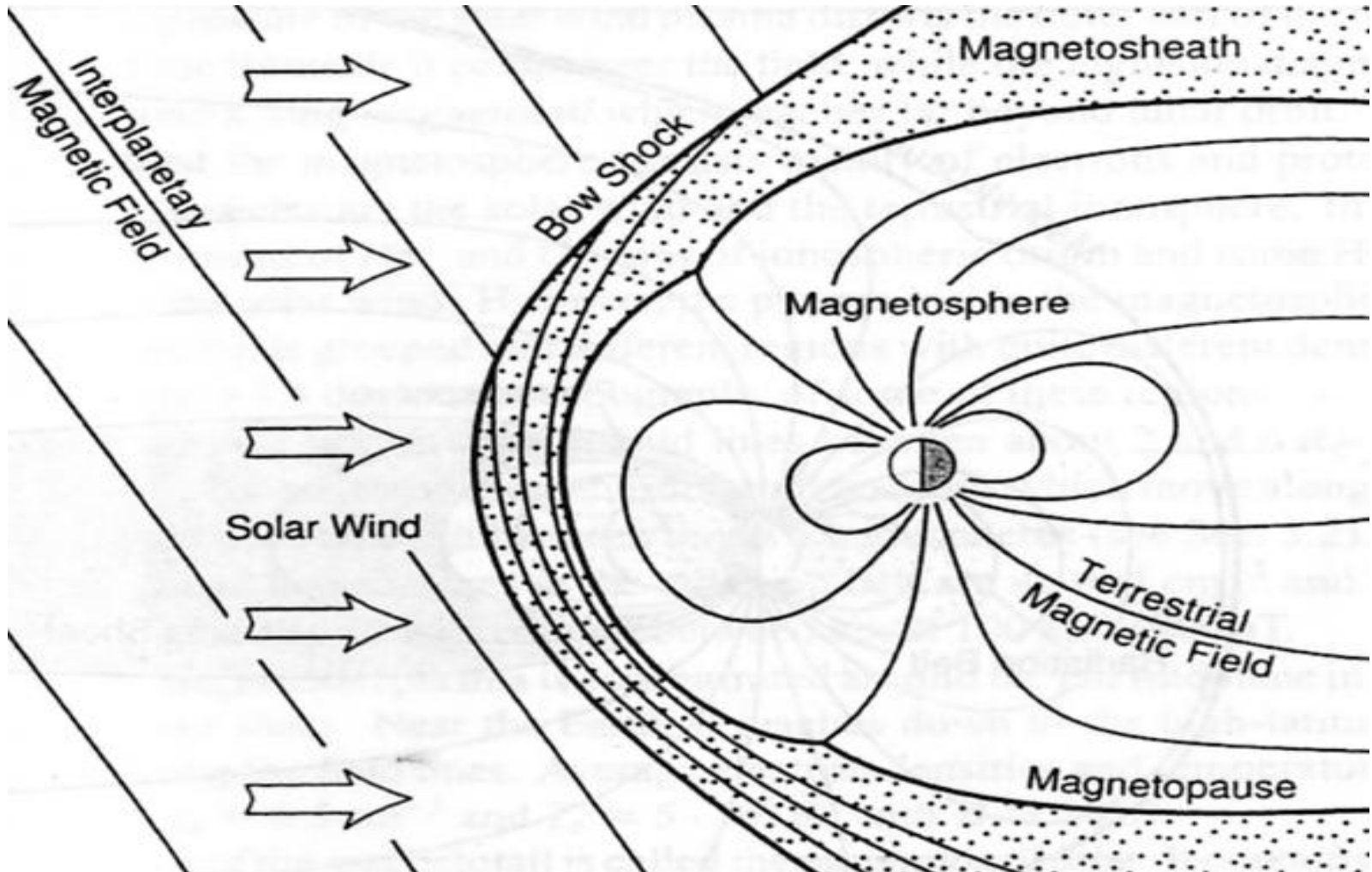
等离子体不仅在宇宙很丰富,在我们太阳系也很丰富。即使在很靠近地球的空间范围,在约100km以上的所有物质,在电离层内及其以上范围,必须用等离子体物理的方法处理。存在着很多不同的地球空间等离子体区,它们的特征参数(如密度和温度等)有很宽范围(见图2)。

*太阳风

由于日冕的超声速膨胀,太阳把高度导电的等离子体以约500km/s的超声速度发射到行星际空间。这种等离子体称为太阳风(Solar wind),主要由电子和质子组成,也混合了约5%的氦离子。由于它的高导电性能,太阳磁场被冻结在太阳风里且被膨胀的太阳风拖着向外运动。在地球轨道附近的太阳风里,典型的电子密度和温度及行星际磁场强度参见表1。

当太阳风遇到地球偶极磁场时不可能简单地穿透进来,而是被减速下来,并在相当大的空间范围内绕流过地磁场。由于太阳风以超声速冲击障碍物,就产生了所谓舷激波(bow shock)(见图3),这里等离子体被减速,粒子动能的一部分转换为热能.在舷激波后面被加热过的亚声速等离子体区称为磁鞘(magnetosheath)

图3 日-地环境结构图



(见图3)，它的等离子体比太阳风等离子体更稠密和更热，该区的磁场强度也更高。

*磁层

在磁鞘里激波下游的太阳风等离子体不容易穿透进入地球磁场，而多数是绕流过它，这是由于行星际磁场不能穿透进入地球磁场，且由于太阳风高导电等离子体的冻结特征使它的粒子也不能离开行星际磁场。

把太阳风和地球磁场分离开的边界称为磁层顶(magnetopause)，而由地球磁场所产生的空穴(cavity)被称为磁层(magnetosphere) (见图3和图4)。太阳风的动压使地球磁场的靠外部分发生了畸变，在其前边磁场被压缩，而夜侧磁场则被拉长成一个长长的到达月球轨道以远的磁尾(magnetotail)。

磁层等离子体主要由电子和质子组成，这些粒子的来源是太阳风和地球的电离层。此外还存在小部分来自电离层的 He^+ 和 O^+ 离子和来自太阳风的 He^{++} 离子。但是，磁层内部的等离子体并不是均匀分布的，而是分成密度和温度很不相同的不同区域，

图4 地球磁层的等离子体结构

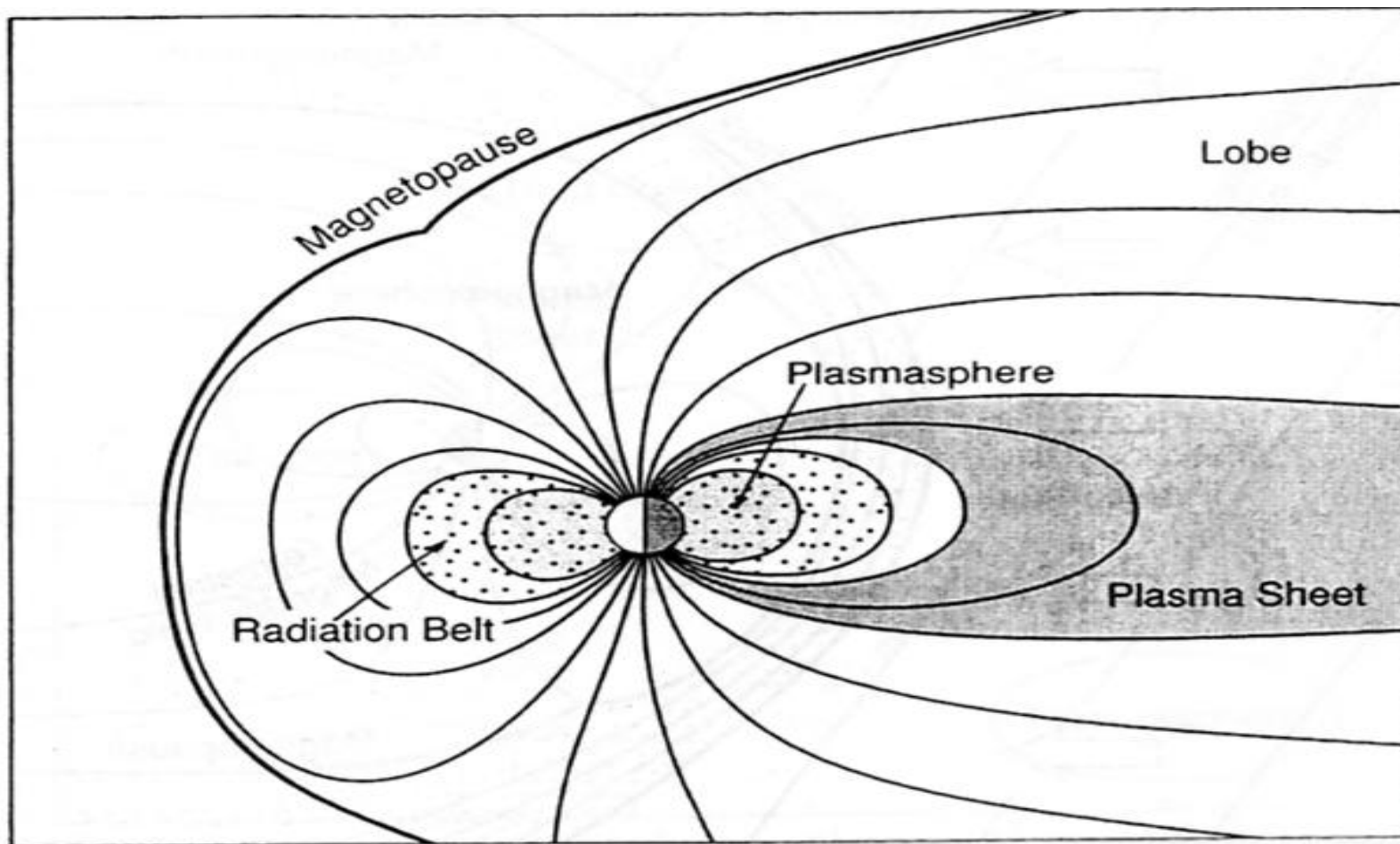


图4是描述这些等离子体区域的示意图.

辐射带(radiation belt)位于约2和6 R_E (地球半径)之间的偶极磁场线上,它由高能电子和离子组成,它们沿场线运动并在南北半球来回振荡。辐射带典型的电子密度和温度及磁场强度参见表1.

等离子体片(plasma sheet). 多数磁尾等离子体集中在磁尾中间平面附近约10 R_E 厚度范围内的等离子体片,它在地球附近沿磁场线向下到达高纬极光电离层(auroral ionosphere)。等离子体片的平均电子密度和温度及磁场强度参见表1。

磁尾的外部称为磁尾瓣(magnetotail lobe),它包含高度稀薄的等离子体,典型的电子密度和温度及磁场强度参见表1。

*电离层(ionosphere)

照射到地球大气层的太阳紫外线使部分中性大气层电离。在约80km以上高度,迅速产生复合的碰撞很不频繁,形成永久电离的粒子群,称为电离层。中纬度电离层典型的电子密度和温度及磁场强度参见表1。

表1. 一些地球空间等离子体区的典型参数

	$n_e(cm^{-3})$	$T_e(K)$	$B(nT)$
太阳风	5	10^5	5
辐射带	1	5×10^7	100–1000
等离子体片	0.5	5×10^6	10
磁尾瓣	10^{-2}	5×10^5	30
中纬度电离层	10^5	10^3	10^4
等离子体层	5×10^2	5×10^3	≥ 500

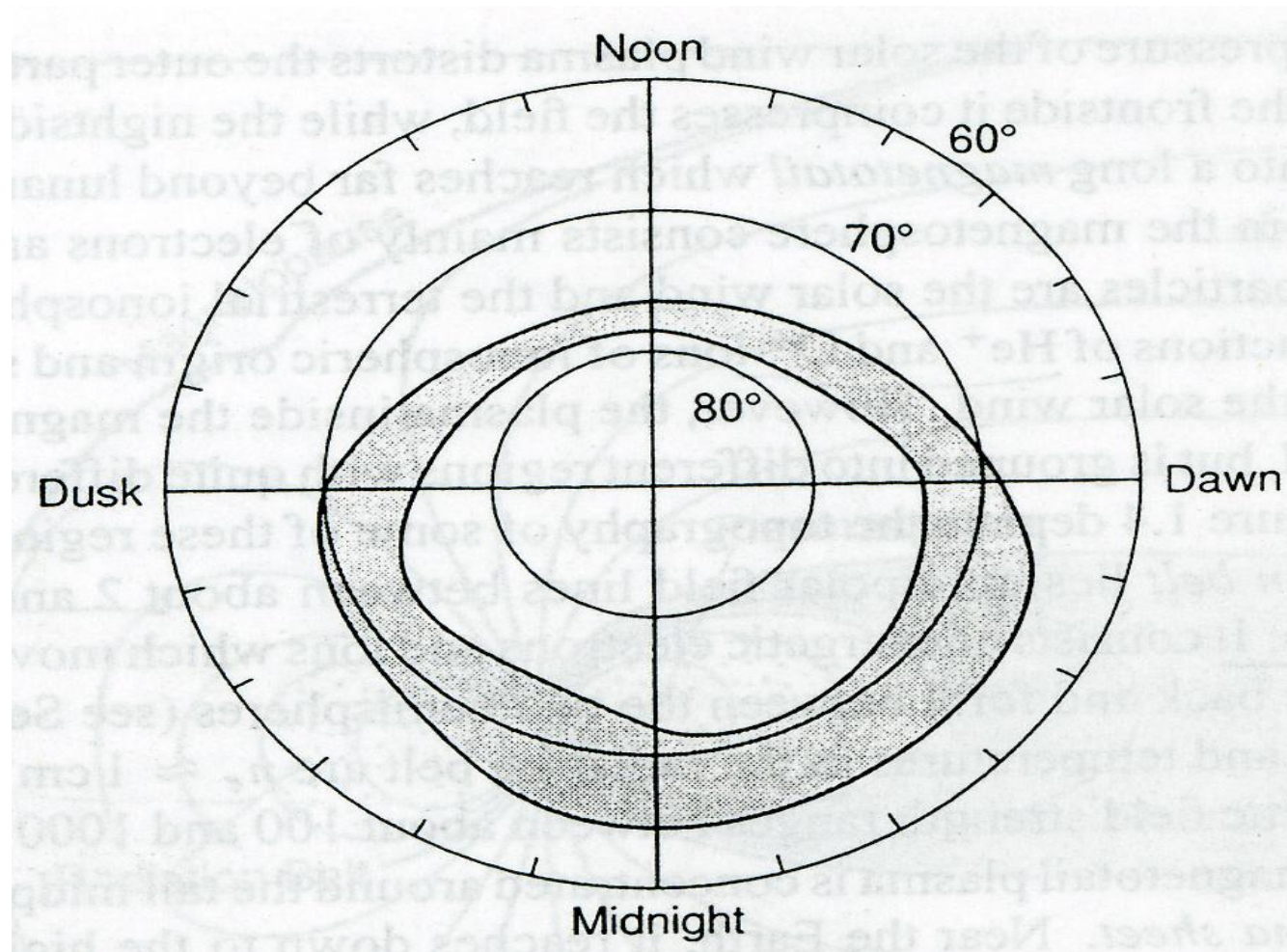
电离层延伸到相当高的高度上，在低纬和中纬逐渐合并为等离子体层(plasmasphere)。如图4所示，等离子体层是一个在辐射带内部的环形球状体，它包含较冷而稠密的电离层来源的等离子体(典型的电子密度和温度参数参见表1)，它与地球共转。在赤道面上，等离子体层延伸到约 $4 R_E$ 左右的边界,这里电子密度急剧下降到 $1cm^{-3}$ 左右，该边界称为等离子体层顶(plasmapause)。

在高纬度上，等离子体片电子能沿磁场线沉降到电离层高度上与中性大气粒子碰撞并使它们电离。作为副产物，由该过程发射的中子产生了极光(aurora)，观测到这些极光典型地是在激光椭圆区(auroral oval)(见图5)，它包含穿过等离子体片磁场线的根部。极光椭圆区的里边是极盖区(polar cap),穿过它的磁场线与磁尾瓣相连接。

*磁层电流

上述的等离子体通常不是固定不动的而是在外力的影响下运动。有时电子和离子一起运动，如太阳风那样。但在其它时候和在别的等离子体区域，离子和电子朝着不同的方向运动，产生了电流。

图5 平均极光椭圆区和极盖区



这些电流在地球等离子体环境动力学中是很重要的，它们输送着电荷，质量，动量和能量。此外，电流产生磁场可能剧烈地改变或扰动任何事先存在的场。

实际上，地球偶极场变为典型的磁层形状的畸变就是与电流相伴随的。正如图6示意地表示的那样，日侧地磁场的压缩联系着横过磁层顶表面的电流，称为磁层顶电流(magnetopause current)，夜侧磁层的尾形磁场是与磁尾表面上流动的尾电流(tail current)和在中心等离子体片中的中性片电流(neutral sheet current)相伴随的，如果沿日-地连线看过去，这两个电流连接起来形成一个 $\ominus$ 形的电流体系。

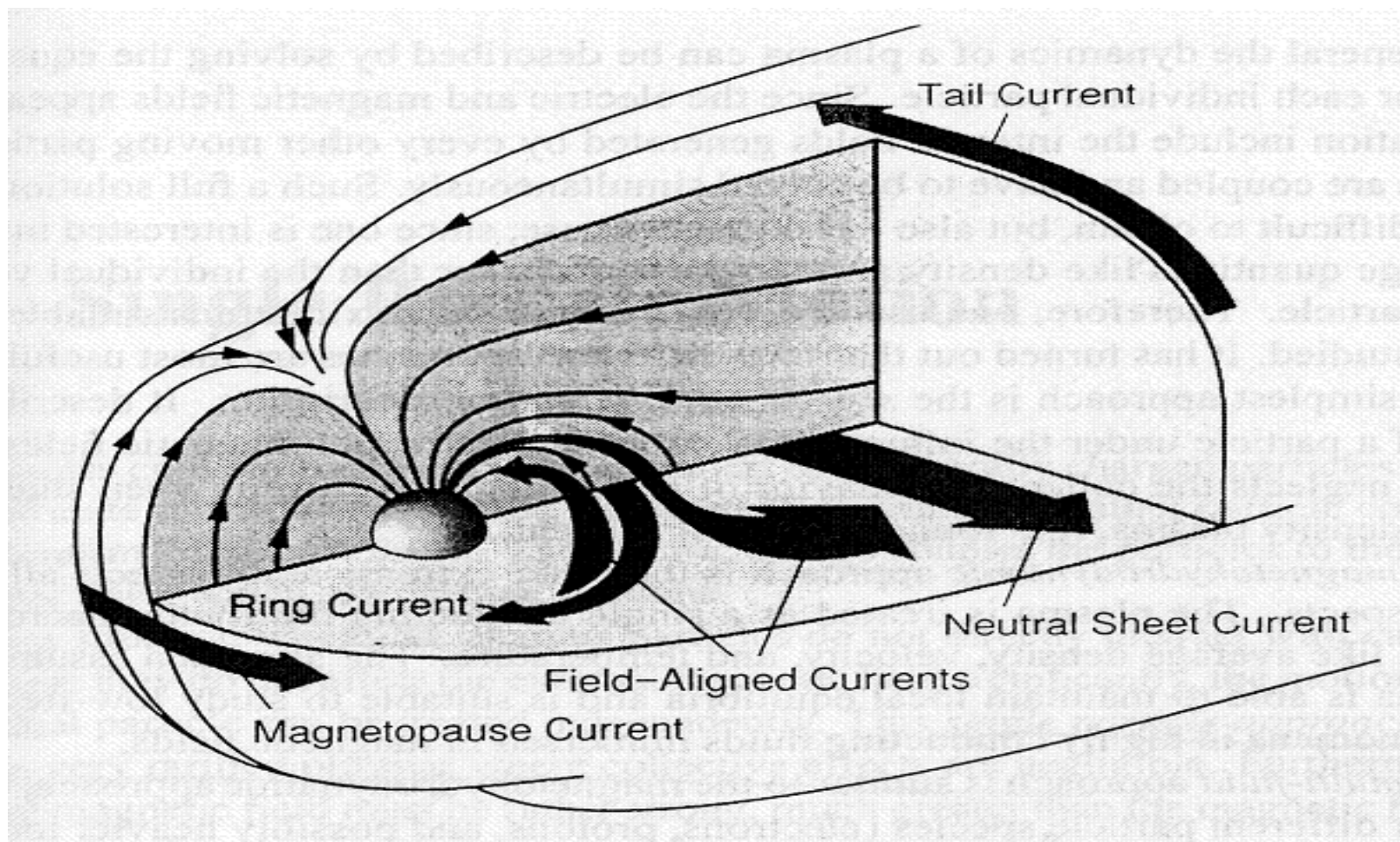
另一个影响内磁层位形结构的大电流体系是所谓环电流(ring current)。环电流是围绕地球向西流动的，它的径向距离有几个地球半径，是由前述的辐射带粒子产生的。除了这些粒子的振荡运动外，它们还围绕地球缓慢地漂移。由于质子向西漂移，而电子向东漂移运动，这样就构成了一个纯电荷输运。

在地球电离层的导电层中100-150km高度上，也存在着一些电流体系，最显著的是在极光椭圆内的极光电急流(auroral electrojets)，在日侧中纬度电离层中的 Sq 电流，和磁赤道

附近的赤道电急流(equatorial electrojet).

除了这些垂直电流外,还有沿磁场线流动的电流。如图6所示,场向电流把磁层中的磁层电流体系与极区电离层中的电流连接起来。场向电流主要是由电子载流的,对这些区域的能量和动量交换是很重要的。

图6 磁层电流体系



● 碰撞

等离子体中粒子之间相互作用总是不可避免的，有近距离的短程二体碰撞作用和远距离的长程电磁力作用。

单个粒子间最简单的相互作用就是直接碰撞，它是个别粒子间的相互作用，或称为短程二体碰撞作用。由于它不涉及大群粒子间长程电磁力的相互作用，不是把等离子体作为一个整体来考虑的相互作用，所以它不是集体等离子体效应。

等离子体可以分为碰撞等离子体和无碰撞等离子体两类。在碰撞等离子体中，碰撞是足够频繁的，它要影响甚至控制等离子体的行为。在无碰撞等离子体中，与场和粒子动力学的任何相关变化比起来，碰撞都是很稀少的并且可以忽略的。大多数空间等离子体属于无碰撞等离子体。

碰撞等离子体还可以分为部分电离等离子体和完全电离等离子体两类。部分电离等离子体包含大量剩余的中性原子或分子，而完全电离等离子体只由电子和离子组成。显然，在两类等离子体中碰撞的类型必定很不同，因为中性成分对Coulomb场没有响

应。在部分电离气体中，带电成分和中性成分之间的直接碰撞起支配作用，而在完全电离等离子体中直接碰撞不重要并被Coulomb碰撞所代替。

*部分电离等离子体

在部分电离等离子体中，多数碰撞发生在带电粒子和中性粒子之间。中性粒子仅仅作为很重的障碍物影响带电粒子的运动。因此，带电粒子和中性粒子之间的碰撞可以处理为迎面直接碰撞。这样的碰撞只发生在带电粒子沿它的轨道直接撞击中性原子或分子。因此，中性碰撞频率(即每秒碰撞的次数)是与中性原子或分子的横截面圆柱内的中性粒子数 V_n 和带电粒子的平均速度 $\langle v \rangle$ 成正比

$$\boxed{V_n = n_n \sigma_n \langle v \rangle} \dots\dots\dots (7)$$

分子的横截面积可以近似为 $\sigma_n \approx 10^{-19} m^2$.

类似地，可以把带电粒子与中性粒子两次碰撞之间能传播的距离定义为平均自由程长度

$$\lambda_n = \frac{\langle v \rangle}{v_n} = (n_n \sigma_n)^{-1} \dots\dots\dots(8)$$

在该定义中采用粒子的平均速度代替粒子本身的实际速度的原因是，碰撞是不可预料的并且它只是在定义平均碰撞频率和平均自由程长度时才有意义。

在比较稠密的和部分电离的空间等离子体中，如电离层，带电粒子与中性粒子之间的碰撞变得很重要，它们对复合，电阻，电流做贡献，并引起带电粒子横越磁场的扩散。

*完全电离等离子体

在完全电离等离子体中，带电粒子通过它们的Coulomb电场相互作用。这些电场的存在意味着，粒子在远大于原子半径的粒子间距处就被偏转。因此，Coulomb势增大了碰撞粒子的横截面，但也导致偏重小角度偏转。这两点使得完全电离等离子体中碰撞频率的计算变得相当复杂。

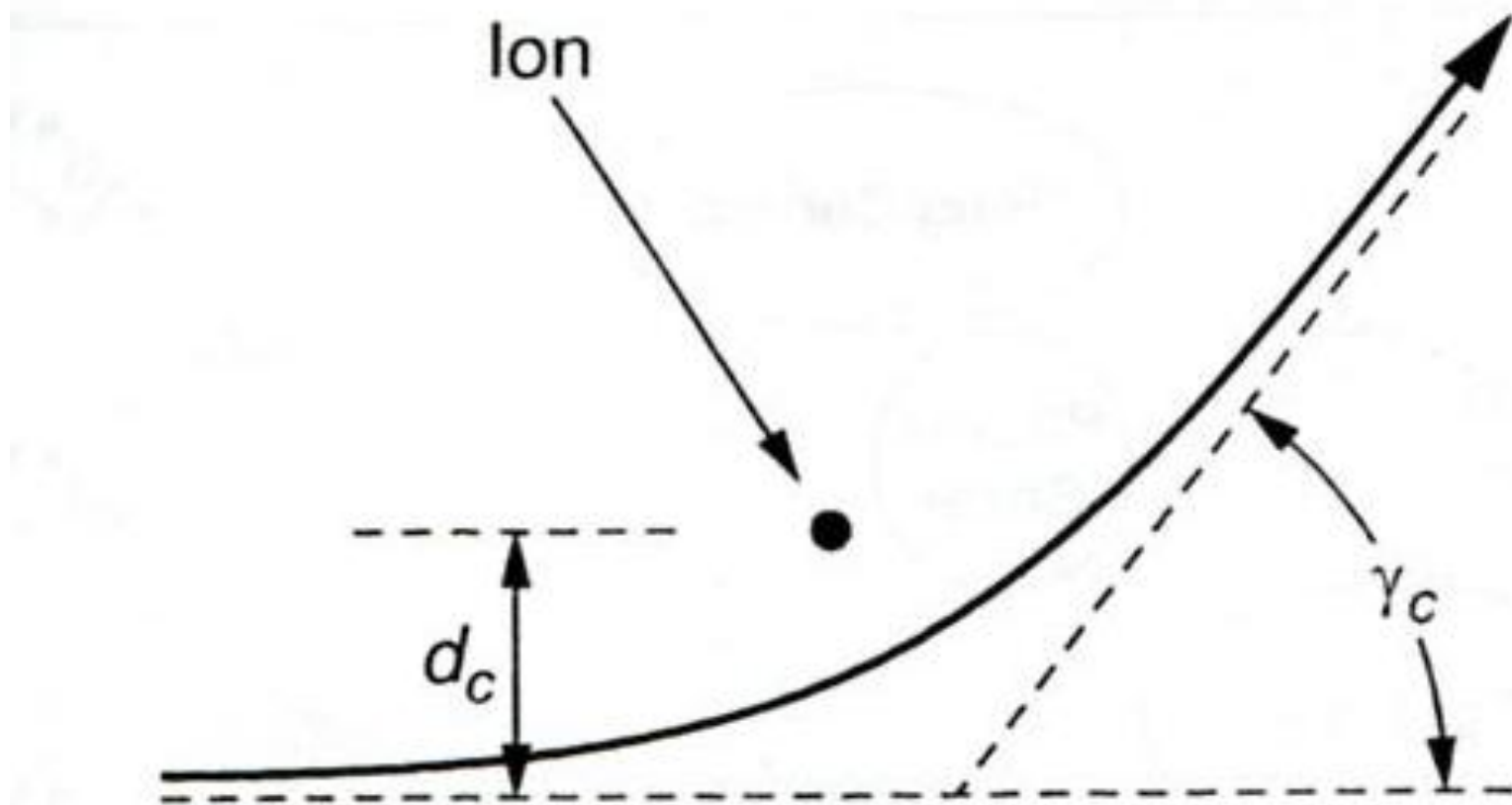
进一步的复杂性来自这一事实，在多粒子等离子体的Debye球内，Coulomb势被屏蔽，电场近似地被限制在Debye球中。可以认为，横截面的等效半径应变得等于Debye长度。但并不是这样的情况，因为Debye球对足够高能量的粒子是透明的。由于当逼近球中心时Coulomb势很快增大，偏转将主要出现在Debye半径内，但大角度偏转将仍然很少。形式上，在完全电离等离子体中的Coulomb碰撞频率有与(7)式相同的函数关系，即有

$$\boxed{\nu_{ei} = n_e \sigma_c \langle v_e \rangle} \dots\dots\dots(9)$$

问题在于确定Coulomb碰撞横截面 σ_c 。下面我们将介绍在完全电离等离子体中电子和离子间Coulomb碰撞频率的简单推导。

考虑一个重离子和一个电子之间的碰撞。由于离子质量较大，可以把离子考虑成静止不动。当电子逼近离子时，它将在离子的Coulomb场中被吸引向离子而偏转，如图7所示。在完全电离等

图7 在与离子Coulomb碰撞期间电子的轨道



离子体中, 电子的温度因而能量相当高, 离子不能捕获电子, 电子将绕离子偏转而逃逸, 它的轨道是一条双曲线, 离开离子的距离可以用两条直线来近似, 靠近离子时用一段半径为 d_c 的圆来代替。

距离 d_c 被称为碰撞参数. 确定这个量的最简单方法是考虑离子作用在质量为 m_e , 电荷为 $q = -e$, 速度为 v_e 的电子上的 Coulomb 力

$$F_c = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d_c^2} \dots\dots\dots (10)$$

该力只是在近似平均时间 $\tau \approx d_c / v_e$ 期间当电子通过离子时被电子感受到。在此时间内它经历的动量变化 $|\Delta(m_e v_e)|$ 可近似地由乘积 $\tau |F_c|$ 或

$$|\Delta(m_e v_e)| \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 v_e d_c} \dots\dots\dots (11)$$

来给定。在大偏转角情况下, $\gamma_c \approx 90^\circ$, 粒子动量的变化与动量本

身同量级, $\Delta(m_e v_e) \approx m_e v_e$ 。将这个粗略的近似代入上面的方程
使我们能对给定的速度确定 d_c

$$d_c \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v_e^2} \dots\dots\dots(12)$$

并得到最大横截面积为

$$\sigma_c = \pi d_c^2 \approx \frac{e^4}{16\pi\epsilon_0^2 m_e^2 \langle v_e \rangle^4} \dots\dots\dots(13)$$

这里我们用了平均电子速度代替电子速度, 因为电子整体以平均速度运动。再用电子等离子体密度和平均电子速度乘该方程后, 得到由(9)式定义的电子和离子间的碰撞频率

$$\boxed{\nu_{ei} = n_e \sigma_c \langle v_e \rangle \approx \frac{n_e e^4}{16\pi\epsilon_0^2 m_e^2 \langle v_e \rangle^3} \dots\dots\dots(14)}$$

同时也可以采用平均热电子能量关系 $k_B T_e = \frac{1}{2} m_e \langle v_e \rangle^2$ 和等离子体
频率的定义得到简化的表达式

$$\nu_{ei} \approx \frac{\sqrt{2}\omega_{pe}^4}{64\pi n_e} \left(\frac{k_B T_e}{m_e} \right)^{-3/2} \dots\dots\dots(15)$$

可见，碰撞频率随密度增大而增大,随电子温度的增大而减小.
这个公式是不严格的，因为我们必须把修正因子 $\ln \Lambda$ 包含在对弱偏转角占支配地位以及在等离子体的热平衡中假定的不同速度电子情况的修正。用 $\ln \Lambda$ 乘 (15)式并利用(4)式的定义来简化就得到

$$\boxed{\nu_{ei} \approx \frac{\omega_{pe}}{64\pi} \frac{\ln \Lambda}{\Lambda}} \dots\dots\dots(16)$$

该式给出电子-离子碰撞频率一个合理的好的估计。 $\ln \Lambda$ 被称为 **Coulomb**对数，它具有10-30的量级.与中性粒子碰撞情况一样，平均自由程长度可以定义为

$$\boxed{\lambda_e = \frac{\langle v_e \rangle}{\nu_{ei}} \approx \frac{64\pi n_e}{\omega_{pe}^4 \ln \Lambda} \left(\frac{k_B T_e}{m_e} \right)^2} \dots\dots\dots(17)$$

由于该长度与电子温度的平方成正比，因此电子的平均自由程长度在冷等离子体中是很短的，而在热等离子体中是很长的。另外，把表达式简化成

$$\lambda_e \approx 64\pi\lambda_D \frac{\Lambda}{\ln \Lambda} \dots\dots\dots(18)$$

该式表明，在等离子体中平均自由程长度与Debye长度的比的确是一个很大数。

图8和图9表示出在一些地球空间等离子体区域内碰撞频率和平均自由程长度的典型范围。可以看出,平均自由程长度远大于等离子体区域本身的大小范围。同时,在所有区域内碰撞频率都远小于等离子体频率(图8)。因此,大多数地球物理等离子体都可以看成是无碰撞的。

碰撞也可能发生在电子和电子之间或离子和离子之间。这些粒子有相等的质量，碰撞也影响两种粒子的运动。相等质量粒子之间的碰撞经动量交换会很快平衡它们的速度，一种粒子将容易假定一个确定的平均温度，不同质量粒子间的温度可以是不同的。

图8 地球空间等离子体中典型的Coulomb碰撞频率

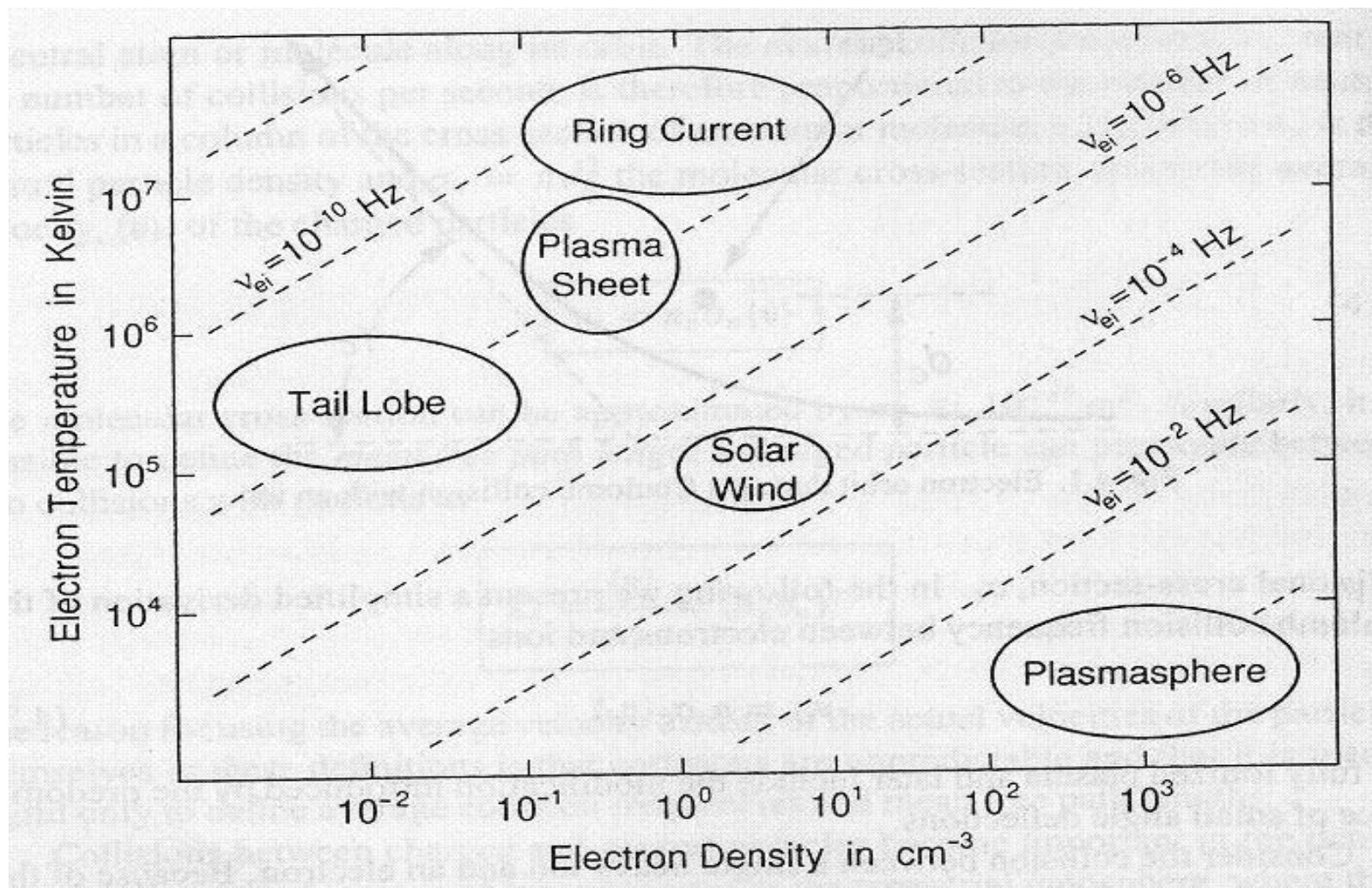
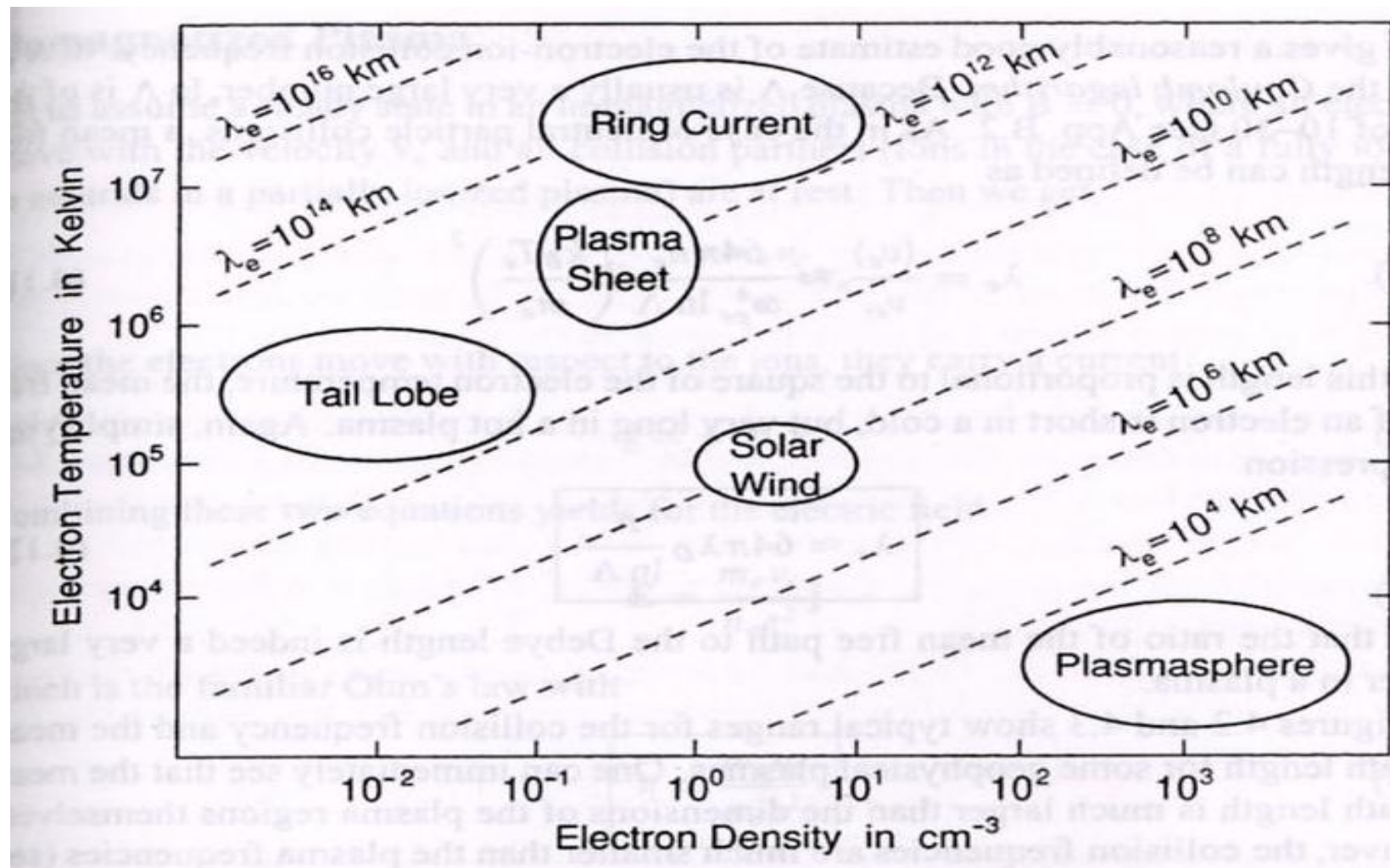


图9 地球空间等离子体中典型的Coulomb平均自由程长度



矢量分析:

1. 矢量代数

$$(1) \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times (\mathbf{d} \times \mathbf{e}) = -\mathbf{b} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{d}) \quad [\text{I.1}]$$

$$(2) \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \quad [\text{I.2}]$$

$$(3) \mathbf{f} = \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \quad [\text{I.3}]$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) \quad [\text{I.4}]$$

2. 散度、旋度和梯度

哈密顿算符

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad [\text{I.5}]$$

标量场梯度

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z \quad [\text{I.6}]$$

矢量场散度

$$\nabla \bullet \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \quad [\text{I.7}]$$

和矢量场旋度

$$\nabla \times \vec{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \quad [\text{I.8}]$$

3. 关于散度和旋度的定理

(1) 标量场的梯度必为无旋场

$$\nabla \times \nabla \Phi = \mathbf{0} \quad [\text{I.9}]$$

(2) 矢量场的旋度必为无源场

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{f} = 0 \quad [\text{I.10}]$$

(3) 无旋场必可表为标量场的梯度

$$\text{若 } \nabla \times \mathbf{f} = \mathbf{0}, \text{ 则 } \mathbf{f} = \nabla \Phi \quad [\text{I.11}]$$

(4) 无源场必可表一个矢量场的旋度

$$\text{若 } \nabla \cdot \mathbf{f} = 0, \text{ 则 } \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{A} \quad [\text{I.12}]$$

(5) 矢量场散度的积分变换式（奥高公式）

[I.13]

$$\int_v \nabla \cdot \vec{f} dV = \oint_s \vec{f} \cdot d\vec{S}$$

(6) 矢量场旋度的积分变换式（斯托克斯公式）

[I.14]

$$\int_s \nabla \times \vec{f} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{f} \cdot d\vec{l}$$

算符运算公式：

1. 矢量代数

$$\nabla(\Theta\Phi)=\Theta\nabla\Phi+\Phi\nabla\Theta \quad [I.15]$$

$$\nabla\cdot(\Theta\mathbf{f})=\nabla\Theta\cdot\mathbf{f}+\Theta\nabla\cdot\mathbf{f} \quad [I.16]$$

$$\nabla\times(\Theta\mathbf{f})=\nabla\Theta\times\mathbf{f}+\Theta\nabla\times\mathbf{f} \quad [I.17]$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{f}\times\mathbf{g})=(\nabla\times\mathbf{f})\cdot\mathbf{g}-\mathbf{f}\cdot(\nabla\times\mathbf{g}) \quad [I.18]$$

$$\nabla\times(\mathbf{f}\times\mathbf{g})=(\mathbf{g}\cdot\nabla)\mathbf{f}+(\nabla\cdot\mathbf{g})\mathbf{f}-(\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g}-(\nabla\cdot\mathbf{f})\mathbf{g} \quad [I.19]$$

$$\nabla(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})=\mathbf{f}\times(\nabla\times\mathbf{g})+(\mathbf{g}\cdot\nabla)\mathbf{f}+\mathbf{g}\times(\nabla\times\mathbf{f})+(\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g} \quad [I.20]$$

$$\nabla\cdot\nabla\Theta=\nabla^2\Theta \quad [I.21]$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{f})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{f})-\nabla^2\mathbf{f} \quad [I.22]$$

$$\nabla(f^2)/2=\mathbf{f}\times(\nabla\times\mathbf{f})+(\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{f} \quad \text{或} \quad (\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{f}=\nabla(f^2)/2-\mathbf{f}\times(\nabla\times\mathbf{f})$$

● 等离子体电导率

在考虑碰撞的情况下，我们必须在带电粒子在Coulomb力和罗伦兹(Lorentz)力作用下的运动方程中增加一个碰撞项。假定所有的碰撞伙伴都以速度 $\mathbf{u}$ 运动，我们得到以速度 $\mathbf{v}$ 运动的带电粒子的运动方程为

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - m\nu_c(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \dots \dots \dots (19)$$

该式右边的碰撞项描述通过频率为 ν_c 的碰撞引起的动量损失。由于它阻止运动，常常被称为摩擦项。方程(19)对Coulomb碰撞和中性碰撞都成立。

* 无磁化等离子体

假定稳态无磁($\mathbf{B} = 0$)中，所有电子以速度 $\mathbf{v}_e$ 运动，所有的碰撞伙伴(完全电离等离子体中的离子和部分电离等离子体中

的中性粒子)都静止不动。于是我们得到

$$\mathbf{E} = -\frac{m_e v_c}{e} \mathbf{v}_e \dots\dots\dots(20)$$

由于电子相对于离子运动，它们带的电流为

$$\mathbf{j} = -en_e \mathbf{v}_e \dots\dots\dots(21)$$

联合这两个方程后得到电场为

$$\mathbf{E} = \frac{m_e v_c}{n_e e^2} \mathbf{j} \dots\dots\dots(22)$$

这是类似的**Ohm**定律，其中等离子体电阻为

$$\eta = \frac{m_e v_c}{n_e e^2} \dots\dots\dots(23)$$

对完全和部分电离等离子体该式有相同的形式，不同的只是采用的碰撞频率不同。

对完全电离等离子体，我们可以引入**Coulomb**碰撞频率，将(16)

式代入(23)式得到完全电离等离子体中的斯必泽电阻(Spitzer resistivity)

$$\eta_s = \frac{1}{64\pi\epsilon_0\omega_{pe}} \frac{\ln \Lambda}{\Lambda} \dots\dots\dots(24)$$

Spitzer电阻实际上与等离子体密度无关，因为乘积 $\omega_{pe}\Lambda$ 与密度无关。事实上,如果试图通过增加更多电荷载流子来增大电流，也就增大了碰撞频率和磨擦力，由此也就减小了电荷载流子的运动速度而使电流减小。

*磁化等离子体

在磁化情况下，等离子体可以以速度 $\mathbf{v}$ 横越磁场运动，在(22)式中必须增加由Lorentz变换引起的 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 电场，得到

$$\mathbf{j} = \sigma_0 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \dots\dots\dots(25)$$

这里我们用电阻的倒数(等离子体电导率 σ_0)来代替电阻

$$\sigma_0 = \frac{1}{\eta} = \frac{n_e e^2}{m_e \nu_c} \dots\dots\dots(26)$$

方程(25)是广义Ohm定律的简单形式，它对所有完全电离的空间等离子体是成立的，因为它们的典型碰撞频率极小(见图8)，等离子体电导率可以考虑为近乎无穷大。

在稀薄的完全电离的磁层和太阳风等离子体中有近乎无穷大的电导率，等离子体电导率处理为标量。但在部分电离的地球电离层的较低部分必须考虑磁场存在引起的各向异性，这里上层大气的离化成分和中性成分之间丰富的碰撞在强磁场存在情况下将导致有限的各向异性的电导率张量。

再次从(19)式出发并假定稳态，所有电子以速度 $\mathbf{v}_e$ 运动，所有碰撞伙伴都静止不动，但现在是在磁场中，我们得到

$$\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B} = -\frac{m_e v_c}{e} \mathbf{v}_e \dots \dots \dots (27)$$

利用(26)式中 σ_0 的定义和(21)式中用电流表示的 $\mathbf{v}_e$ 后得到另一种形式的Ohm定律

$$\mathbf{j} = \sigma_0 \mathbf{E} - \frac{\sigma_0}{n_e e} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \dots \dots \dots (28)$$

现在让我们假定磁场是沿z-方向的, $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, 和带符号的电子回旋频率的定义, 我们得到

$$\begin{aligned}j_x &= \sigma_0 E_x + \frac{\omega_{ge}}{\nu_c} j_y \\j_y &= \sigma_0 E_y - \frac{\omega_{ge}}{\nu_c} j_x \dots\dots\dots(29) \\j_z &= \sigma_0 E_z\end{aligned}$$

从而可以得到

$$\begin{aligned}j_x &= \frac{\nu_c^2}{\nu_c^2 + \omega_{ge}^2} \sigma_0 E_x + \frac{\omega_{ge} \nu_c}{\nu_c^2 + \omega_{ge}^2} \sigma_0 E_y \\j_y &= \frac{\nu_c^2}{\nu_c^2 + \omega_{ge}^2} \sigma_0 E_y - \frac{\omega_{ge} \nu_c}{\nu_c^2 + \omega_{ge}^2} \sigma_0 E_x \dots\dots\dots(30) \\j_z &= \sigma_0 E_z\end{aligned}$$

该分量方程组可以写成矢量形式

$$\mathbf{j} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} \dots \dots \dots (31)$$

当磁场沿z方向时,电导率张量为

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_p & -\sigma_H & 0 \\ \sigma_H & \sigma_p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{//} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (32)$$

其中张量的分量为

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \frac{v_c^2}{v_c^2 + \omega_{ge}^2} \sigma_0 \\ \sigma_H &= -\frac{\omega_{ge} v_c}{v_c^2 + \omega_{ge}^2} \sigma_0 \dots \dots \dots (33) \\ \sigma_{//} &= \sigma_0 = \frac{n_e e^2}{m_e v_c} \end{aligned}$$

张量分量 σ_p 称为**Pedersen**电导率，它控制垂直于磁场的电场 $E_{\perp}$ 方向的**Pedersen**电流. **Hall**电导率 σ_H 决定垂直于电场和磁场两

个方向,并在 $-\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 方向(记住, ω_{ge} 是负数)的Hall电流。张量分量 $\sigma_{//}$ 称为平行电导率,因为它控制平行电场分量 $E_{//}$ 驱动的磁场向电流。在无磁化情况下平行电导率等于等离子体电导率。

当磁场与所选坐标系轴有任意夹角时, (31)式可以写成

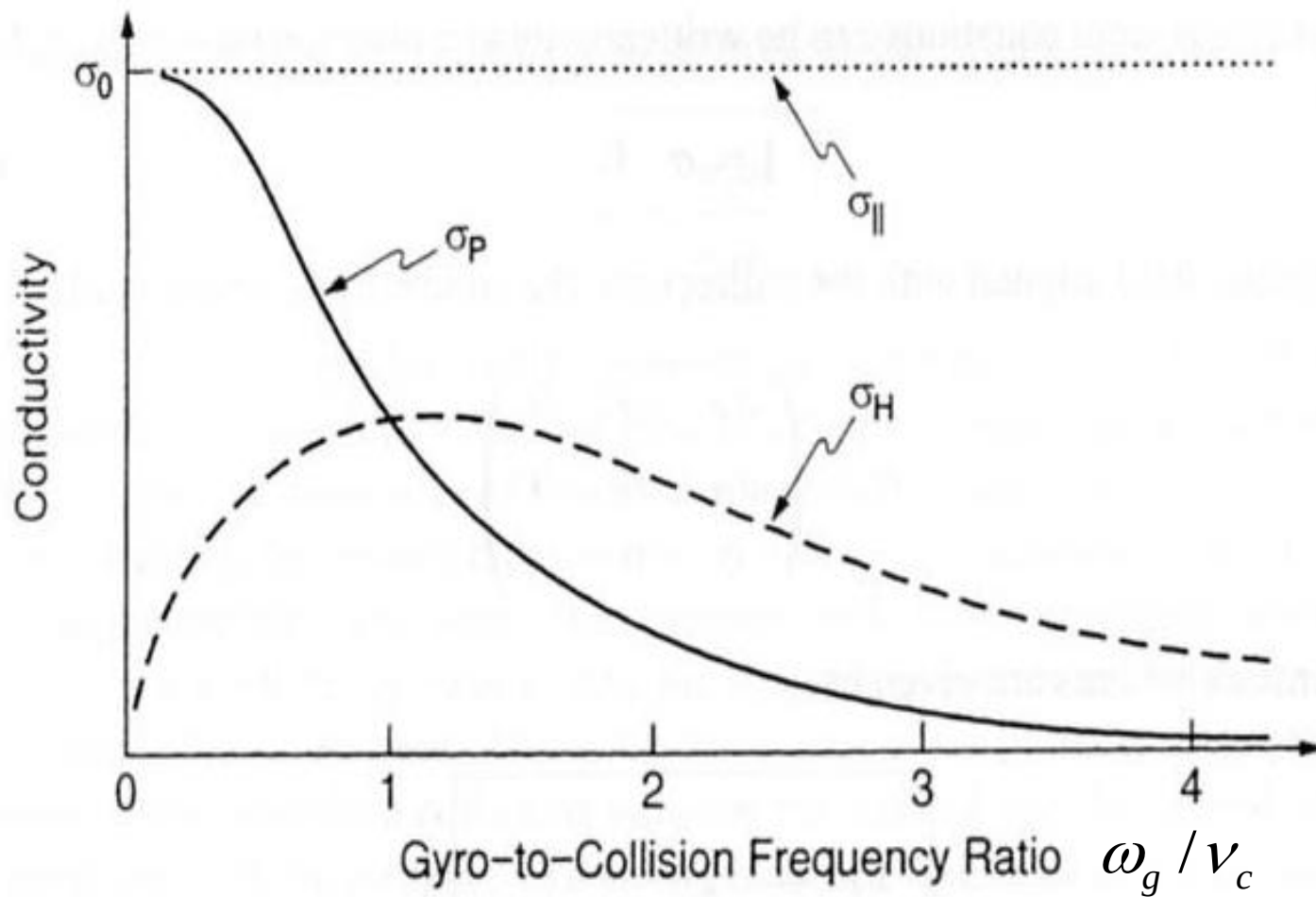
$$\mathbf{j} = \sigma_{//} \mathbf{E}_{//} + \sigma_p \mathbf{E}_{\perp} - \sigma_H (\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B})/B \dots \dots \dots (34)$$

该式可以直接从(28)式导出。

电导率张量分量随回旋频率与碰撞频率的比值的变化表示在图10中。在包含弱磁场的高碰撞等离子体中,有 $|\omega_{ge}| \ll \nu_c$ 。(33)式表明, $\sigma_p = \sigma_{//} = \sigma_0$ 和 $\sigma_H = 0$, 电导率变为各向同性的标量。在稀薄的近乎无碰撞的强磁场等离子体中, 我们有 $|\omega_{ge}| \gg \nu_c$, 从而有 $\sigma_{//} = \sigma_0$ 和 $\sigma_p \approx \sigma_H \approx 0$, 因此在这种等离子体中电流主要是沿磁场线流动。

以上介绍的是在碰撞作用下等离子体中的电导率和电阻。在等离子体集体相互作用下将产生反常碰撞和反常电阻等集体效应,在高级等离子体物理理论中将进一步讨论。

图10 电导率随频率比 ω_g / ν_c 的变化



导论思考题

- (1) 等离子体的定义（或什么叫等离子体）？
- (2) 解释下列各等离子体物理术语的物理含义：
Debye 屏蔽、Debye 势和Debye长度，电荷中性，等离子体参量，等离子体振荡和等离子体频率，近程作用和远程作用，集体效应，碰撞，Coulomb碰撞，等离子体电阻和电导率。
- (3) 简述等离子体三种理论研究方法的要点和适用条件。

第一部分 单粒子轨道理论

第一章 单粒子在外加电磁场中的运动

1.1 场方程

1.2 回旋运动

1.3 引导中心的电漂移

$\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移、极化漂移、电漂移修正

1.4 引导中心的磁漂移

梯度漂移、一般力漂移、曲率漂移

1.5 绝热不变量

磁矩、磁镜、绝热加速、纵向不变量、能量各向异性、漂移不变量、不变性的违反

1.6 结语

等离子体是由大量带电粒子组成的系统，粒子带电状态是等离子体与其它如普通气体和液体那样的非带电粒子系统的重要区别，带电使粒子与电磁场耦合，影响它们的运动。

在带电粒子不直接相互作用并且也不显著影响外加磁场的情况下，每个单个粒子的运动可以单独地处理。这种单粒子近似(single particle approach)只有在集体效应可以忽略的很稀薄的等离子体中才适用。

后面我们将看到，单粒子近似只在某些地球物理感兴趣的等离子体中可以采用。不过，为了理解等离子体集体行为，比如带电粒子在自身运动产生的电磁场影响下的运动，先研究带电粒子在规定的(或外加的)电场和磁场中的运动是很有益的。

1.1. 场方程

在描述粒子在外加电场和磁场中的运动之前，我们先引入电磁场方程。电荷和电磁场之间存在着两个方面的耦合。带电粒子在静止时是静电场 E 的源，它是Coulomb力的来源

$$\mathbf{F}_C = q\mathbf{E}.....(1.1)$$

它们感受到其它所有粒子联合的静电场。另一方面,以速度 $\mathbf{v}$ 运动的带电粒子是产生磁场 $\mathbf{B}$ 的电流元,是Lorentz力的来源

$$\mathbf{F}_L = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).....(1.2)$$

带电粒子的运动强烈地受到电磁场存在的影响,而同时它也是电磁场的来源.电磁场和粒子之间的关系由Maxwell方程组描述

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(1.4)$$

其中 $\mathbf{j}$ 是等离子体的电流密度,而 ε_0 和 μ_0 分别是真空中的介电常数和磁化率, 求和是对所有等离子体粒子进行。

这些方程表明,电场和磁场并不是独立的,因它们的空间和时间变化而耦合在一起.而且,电流密度是磁场的源和电场快变化的源.

由于 $\epsilon_0\mu_0=c^{-2}$ 等于光速平方的倒数，当我们不考虑电磁波传播时，电场的变化项在等离子体中将被略去。因此，如果电场不出现快振荡，(1.3)式右边第二项是很小的。

为了方程组封闭，还必须补充两个方程，即条件

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \dots\dots\dots (1.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \dots\dots\dots (1.6)$$

(1.5)式表示不存在磁场源，因而磁场线总是闭合的。(1.6)式表示电场的源是空间电荷密度 $\rho = e(n_i - n_e)$ ，它是离子和电子电荷密度之差.类似地，电流定义成电子和离子通量之差 $\mathbf{j} = e(n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e)$ ，这里为简单起见我们假定离子是带一个电荷($q_i = e$)。

1.2. 回旋运动

电荷为 q 的带电粒子在(1.1)和(1.2)式给定的Coulomb力和Lorentz力作用下的运动方程可以写成为

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \dots \dots \dots (1.7)$$

其中 m 代表粒子质量, $\mathbf{v}$ 代表粒子速度。在没有电场存在的情况下, 该方程简化为

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \dots \dots \dots (1.8)$$

用 $\mathbf{v}$ 点乘(1.8)式后可以得到

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = 0 \dots \dots \dots (1.9)$$

该式表明, 粒子动能和它的速度大小是常数. 静磁场, 无论它是否空间变化, 是不会改变粒子的动能的。

在沿 z 轴方向的均匀磁场 $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ 中, 我们得到(1.8)式的分量式

$$m \frac{dv_x}{dt} = qBv_y, m \frac{dv_y}{dt} = -qBv_x, m \frac{dv_z}{dt} = 0 \dots \dots \dots (1.10)$$

可见, 与磁场平行的速度分量是常数 $v_{//} = v_z = \text{常数}$ 。对另外两个分量方程取二次导数后可得到

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\omega_g^2 v_x, \frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\omega_g^2 v_y \dots \dots \dots (1.11)$$

其中 ω_g 是回旋频率 (gyrofrequency or cyclotron frequency), 它对正电荷和负电荷有相反的符号 (注意, 也常常采用与电荷符号无关的定义):

$$\omega_g = \frac{qB}{m} = \pm \frac{|q|B}{m} \dots \dots \dots (1.12)$$

方程 (1. 11) 是谐振荡方程, 它有形式解

$$\begin{cases} x - x_0 = r_g \sin \omega_g t \\ y - y_0 = r_g \cos \omega_g t \end{cases} \dots \dots \dots (1.13)$$

由于 ω_g 带着电荷的符号, x 分量解的右边对电子和离子有相反的符号。这里 r_g 是回旋半径 (gyroradius) 或 Larmor 半径, 定义为

$$r_g = \frac{v_{\perp}}{|\omega_g|} = \frac{mv_{\perp}}{|q|B} \dots\dots\dots(1.14)$$

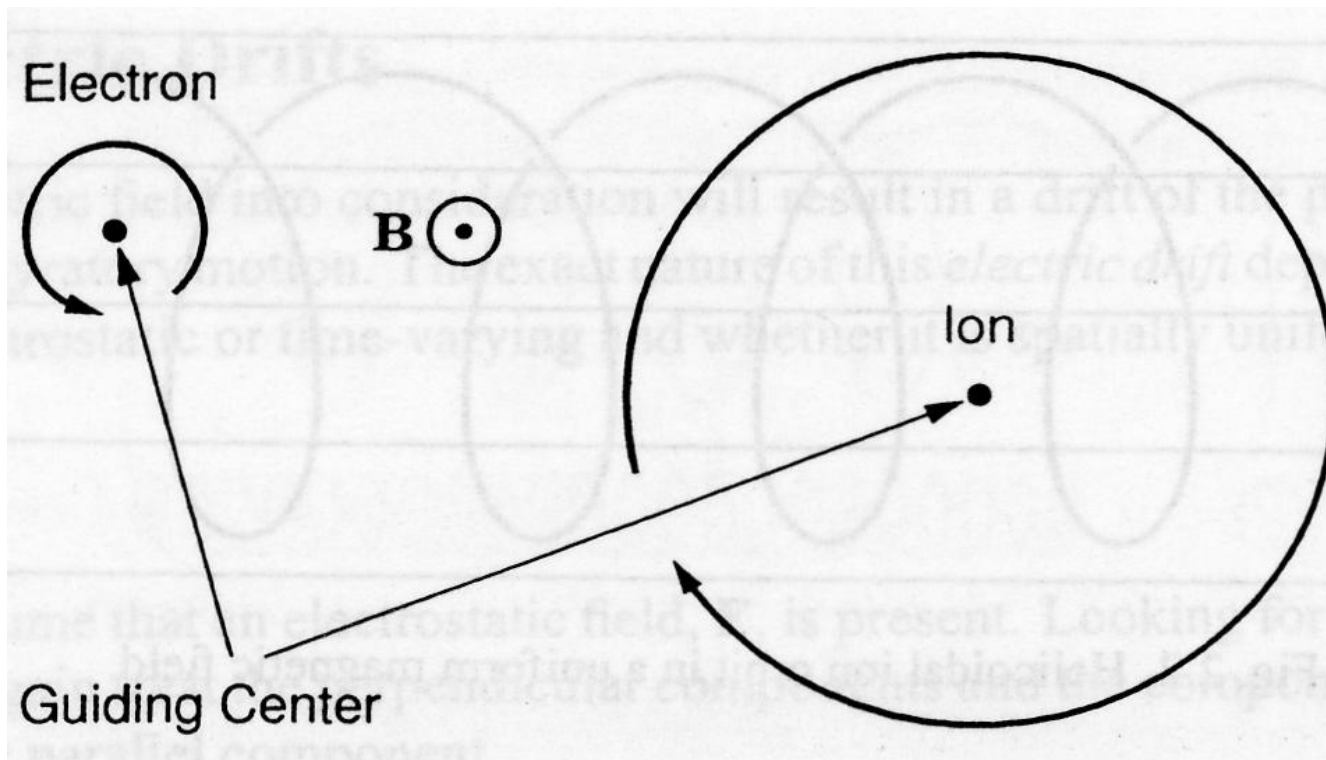
其中 $v_{\perp} = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}$ 是在垂直于 $\mathbf{B}$ 的平面内的常数速度。

方程(1.13)描述粒子围绕磁场运动的圆轨道, 旋转的方向与电荷的符号有关(见图1-1), 圆轨道的中心(x_0, y_0)称为引导中心(guiding center)。带电粒子的圆轨道形成一个小圆电流, 旋转的方向应当是这样, 由小圆电流产生的磁场总是与外加磁场的方向相反, 这种行为称为等离子体的抗磁效应(diamagnetic effect)。在外加磁场 $\mathbf{B}$ 中, 粒子回旋运动形成的小圆电流大小的平均值为

$$I_g = \left| \frac{q}{2\pi / \omega_g} \right| = \frac{q^2 B}{2\pi m}$$

该小圆电流相当于一个磁偶极子, 它具有的磁矩 $\mathbf{m}$ 的大小等于电流 I_g 与电流圆所围面积 πr_g^2 的乘积, 方向由右手螺旋规则来确定:

图1-1 带电粒子围绕引导中心的回旋运动



$$\mathbf{m} = -\frac{q^2 B}{2\pi m} \pi r_g^2 \frac{\mathbf{B}}{B} = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B} \frac{\mathbf{B}}{B} = -\frac{w_{\perp}}{B} \frac{\mathbf{B}}{B}$$

这里 $\mathbf{B}/B$ 是磁场方向上的单位矢量。我们看到, 磁矩的方向反平行于外加磁场, 与粒子的电荷符号无关。

在均匀恒定磁场中, 由于 $w_{\perp}$ 和 B 都是不变量, 所以

$$\mu = \frac{w_{\perp}}{B} = \text{常量}$$

即粒子磁矩是一个运动常数。另外, 通过圆周轨道所围面积的磁通量等于

$$\Phi_g = \pi r_g^2 B = \frac{\pi m^2 v_{\perp}^2}{q^2 B} = \frac{2\pi m}{q^2} \mu = \text{常量}$$

因此 Φ_g 也是一个常量。

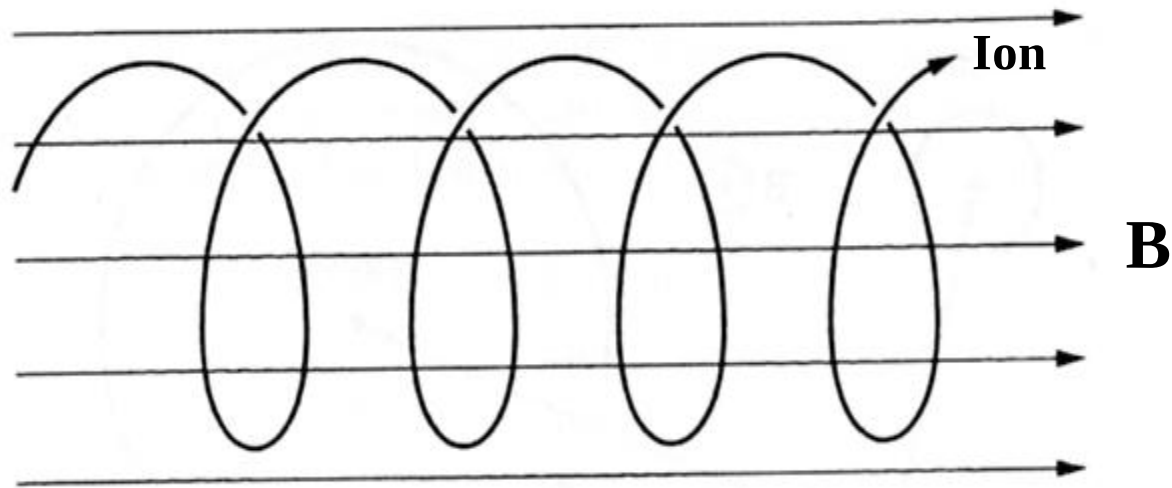
此外, 在图1-1中我们忽略了粒子平行于磁场方向的正的常数速度 $v_{\parallel}$ 。一旦 $v_{\parallel} \neq 0$, 粒子的实际轨道就是三维的且像一个螺旋, 这样的螺旋轨道如图1-2所示, 螺旋的投掷角(pitch angle)

可定义为

$$\alpha = \arctg (v_{\perp} / v_{\parallel}) \dots\dots\dots(1.15)$$

也称为粒子的投掷角, 它与速度的垂直和平行分量的比值有关。

图1-2 在均匀磁场中离子的螺旋轨道



1.3. 引导中心的电漂移

若把电场也考虑进来,粒子的回旋运动将迭加一个漂移运动。此漂移运动的精确特征与场是静电场还是时间变化场有关,也与场是否为均匀场有关。

1.3.1 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移

现在假定存在静电场为 $\mathbf{E}$, 求方程(1.7)的解, 我们可以分别处理平行和垂直分量方程。平行分量方程

$$m (dv_{\parallel}/dt) = qE_{\parallel} \dots \dots \dots (1.16)$$

描述沿磁场方向的直线加速运动。但是, 在多数空间等离子体中不可能维持平行电场, 因为它们立即被电子抵消掉, 在多数环境下电子沿磁场线是极其游离的。

假定垂直电场分量平行于 x 轴 $\mathbf{E}_{\perp} = E_x \mathbf{e}_x$, 方程(1.7)的垂直分量为

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega_g v_y + \frac{q}{m} E_x \dots\dots\dots (1.17a)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\omega_g v_x \dots\dots\dots (1.17b)$$

进行二次导数后可得到

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\omega_g^2 v_x \dots\dots\dots (1.18a)$$

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\omega_g^2 \left(v_y + \frac{E_x}{B} \right) \dots\dots\dots (1.18b)$$

如果我们用 $v'_y = v_y + E_x / B$ 代入(1.18b)，方程(1.18)就化成表示粒子围绕引导中心做回旋运动的(1.11)式形式。因此，方程(1.18a,b)描述一个回旋运动，但又迭加上一个引导中心在 $-y$ 方向的漂移运动，这种引导中心的漂移通常称为 $E \times B$ 漂移，它的一般形式为

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \dots\dots\dots (1.19)$$

$E \times B$ 漂移与电荷的符号无关,因此电子和离子漂移方向相同。

图1-3表示垂直电场的加速和减速效应. 离子加速进入电场方向, 因而增大它的回旋半径, 但在它回旋轨道的第二半圈期间却被减速而减小它的回旋半径。于是不同的回旋半径就使引导中心的位置在 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 方向移动。电子在反平行于电场运动时被加速而在平行于电场运动时被减速。但是由于电子和离子的回旋方向相反, 它们的引导中心 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移是在相同的方向上。

有益地指出, 在电场变换为随粒子运动的参考系的洛仑兹变换 (Lorentz transformation) 中, $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移有一个重要的物理性质。在该运动参考系中, 磁场几乎不变, 而电场变为

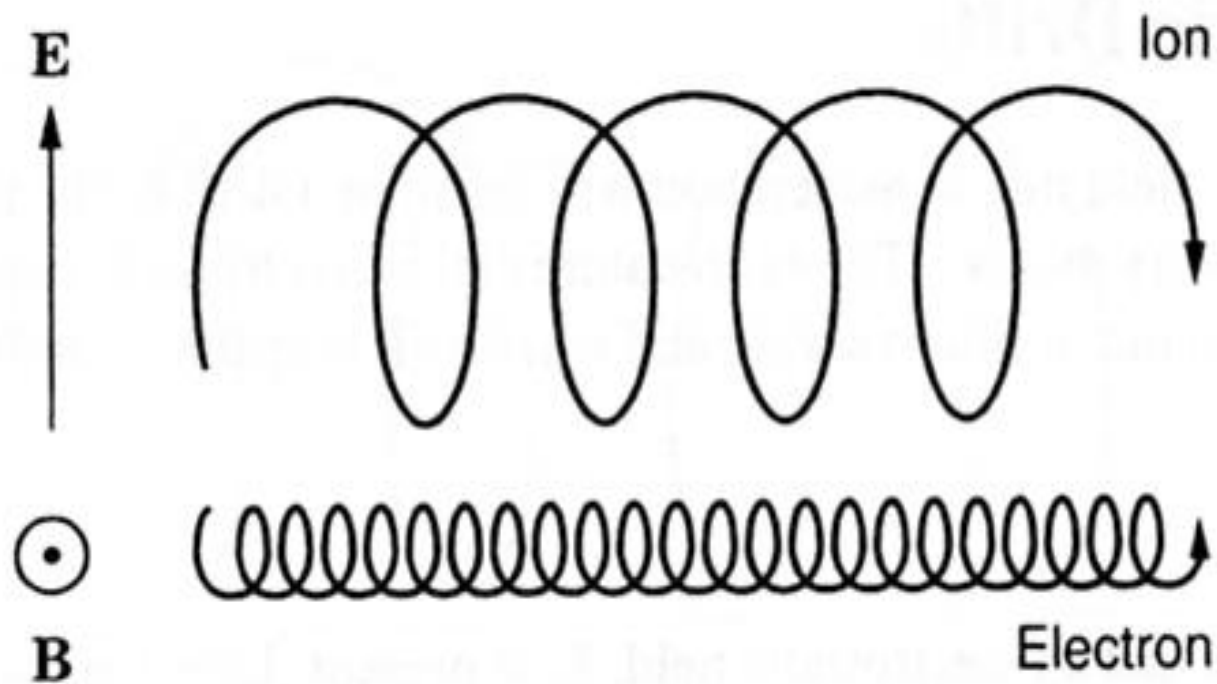
$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \dots \dots \dots (1.20)$$

对此参考系中的粒子来讲, 该电场必须为零 $\mathbf{E}' = 0$, 于是有

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} \dots \dots \dots (1.21)$$

求解出速度就得到电场漂移的方程 (1.19)。由于Lorentz变换与粒子电荷无关, 所以 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移也与电荷无关。

图1-3 正交电磁场中粒子的漂移



1.3.2 极化漂移

方程(1.19)可以直接从方程(1.7)推导得到。对(1.7)式两边叉乘矢量 $\mathbf{B}/B^2$ 后可得到

$$\mathbf{v} - \frac{\mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})}{B^2} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} - \frac{m}{q} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \frac{\mathbf{B}}{B^2} \dots\dots\dots(1.22)$$

我们可以把该式左边考虑成一个垂直速度矢量, 而右边第一项就是 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移。在回旋周期内做平均并忽略回旋周期量级的时间变化或快变化, 就使我们得到垂直速度是漂移速度 $\mathbf{v}_d$ 。记住, 磁场假定为不随时间变化, 我们就写出

$$\mathbf{v}_d = \mathbf{v}_E - \frac{m}{qB^2} \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \dots\dots\dots(1.23)$$

利用方程(1.12)和(1.21)可以得到

$$\mathbf{v}_d = \mathbf{v}_E + \frac{1}{\omega_g B} \frac{d\mathbf{E}_\perp}{dt} \dots\dots\dots(1.24)$$

方程(1.24)描述带电粒子在正交均匀磁场和电场中的漂移, 这里

电场允许缓慢的时间变化，该方程最后一项被称为极化漂移 (polarization drift)

$$\mathbf{v}_p = \frac{1}{\omega_g B} \frac{d\mathbf{E}_\perp}{dt} \dots\dots\dots(1.25)$$

极化漂移和 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移之间存在着重要的量的差别。 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移与粒子的电荷和质量都无关，因为它可以认为是Lorentz变换的结果。这样电子，质子，重离子都是在垂直于 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{E}$ 的同一方向上以相同的速度漂移，另一方面，极化漂移与粒子的质量成正比例地增大，它沿电场方向漂移，但电子和离子的漂移方向相反。于是，产生了电流

$$\mathbf{j}_p = en_e(\mathbf{v}_{pi} - \mathbf{v}_{pe}) = \frac{n_e(m_i + m_e)}{B^2} \frac{d\mathbf{E}_\perp}{dt} \dots\dots\dots(1.26)$$

其中载流的电子和质子是在相反的方向，并使等离子体极化。

由于质量 $m_i \gg m_e$ ，极化电流(polarization current)主要是由离子作为载流子。

1.3.3. 电漂移修正

方程(1.24)也可以描述电场非均匀性引起的漂移,只要把总时间导数取作时间导数和对流导数之和: $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$, 这里速度矢量可以很好地用 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 速度来近似代替,这样对流项就变为与 E^2 成正比例,它是一种非线性贡献,通常远小于时间导数项,因此在多数情况下可以忽略掉。

在假定电场只是缓慢地变化情况下,对流导数可以考虑成电场是在 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移方向上的空间变化。若不是这种情况,当电场在一个回旋半径范围内有显著变化时,就存在对电场漂移的进一步修正,称为有限拉莫尔半径效应(finite Larmor radius effect),该修正是回旋半径 r_g 的二级效应,考虑该效应就导出电场漂移更完整的表达式

$$\mathbf{v}_E = \left(1 + \frac{1}{4} r_g^2 \nabla^2\right) \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \dots\dots\dots (1.27)$$

第二个空间变化项考虑了电场的空间变化并在回旋半径范围内的平均。在粒子运动的宏观应用中,有限拉莫尔半径效应通常被忽略。但是在等离子体边界层附近,等离子体过渡层,和等离子体中的小尺度结构区,该效应可能变得很重要。

*方程（1.27）的推导如下：

设在均匀恒定磁场 $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ 和非均匀恒定电场 $\mathbf{E}(\mathbf{y}) = E_0 \cos(ky)\mathbf{e}_x$ 中，带电粒子的运动方程为

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q[\mathbf{E}(\mathbf{y}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]$$

横向运动分量方程为

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m} v_y + \frac{q}{m} E_x(y), \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m} v_x$$

其中 $E_x(y)$ 是粒子所在位置的电场,在弱电场情况下,可近似用粒子未扰动轨道 $y = y_0 \pm r_g \cos(\omega_g t + \alpha)$ 来计算电场,这里 y_0 是引导中心的 y 坐标.于是由轨道分量方程可得

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\omega_g^2 v_y - \omega_g^2 \frac{E_0}{B} \cos k[y_0 \pm r_g \cos(\omega_g t + \alpha)]$$

由于在 y 方向有回旋和 $E \times B$ 漂移运动，可对 y 方向求回旋平均

后得到

$$\left\langle \frac{d^2 v_y}{dt^2} \right\rangle = 0 = -\omega_g^2 \langle v_y \rangle - \omega_g^2 \frac{E_0}{B} \langle \cos k[y_0 \pm r_g \cos(\omega_g t + \alpha)] \rangle,$$

$$\langle v_y \rangle = -\frac{E_0}{B} \langle \cos k[y_0 \pm r_g \cos(\omega_g t + \alpha)] \rangle$$

利用小**Larmor**半径近似 $kr_g \ll 1$ ，可把余弦函数作展开

$$\begin{aligned} & \cos k[y_0 \pm r_g \cos(\omega_g t + \alpha)] \\ &= \cos ky_0 \cos[kr_g \cos(\omega_g t + \alpha)] \mp \sin ky_0 \sin[kr_g \cos(\omega_g t + \alpha)] \\ &\approx \cos ky_0 \left[1 - \frac{1}{2} k^2 r_g^2 \cos^2(\omega_g t + \alpha) \right] \mp \sin ky_0 \cdot kr_g \cos(\omega_g t + \alpha) \end{aligned}$$

于是回旋平均后得到

$$\mathbf{v}_E = \langle v_y \rangle \mathbf{e}_y = -\left(1 - \frac{1}{4} k^2 r_g^2\right) \frac{E_0 \cos ky_0}{B} \mathbf{e}_y = \left(1 - \frac{1}{4} k^2 r_g^2\right) \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$$

对于一般的空间变化电场 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$ ，空间变化可用算符 $\nabla^2 = (ik)^2 = -k^2$ 来表示，于是得到非均匀电场漂移速度更完整的表达式（1.27）。

1.4 磁漂移

前面在研究方程(1.8)时,我们假定了磁场是均匀的.但经常并不是这种情况,典型的磁场有梯度,磁场线常常是弯曲的。种磁场的非均匀性会引起带电粒子的磁漂移(magnetic drift)。磁场的变化本身不能把能量交给粒子。因为Lorentz力总是垂直于粒子的速度。但是由于 $\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E}$, 相关的非均匀电场可以按前节描述的方式加速粒子。

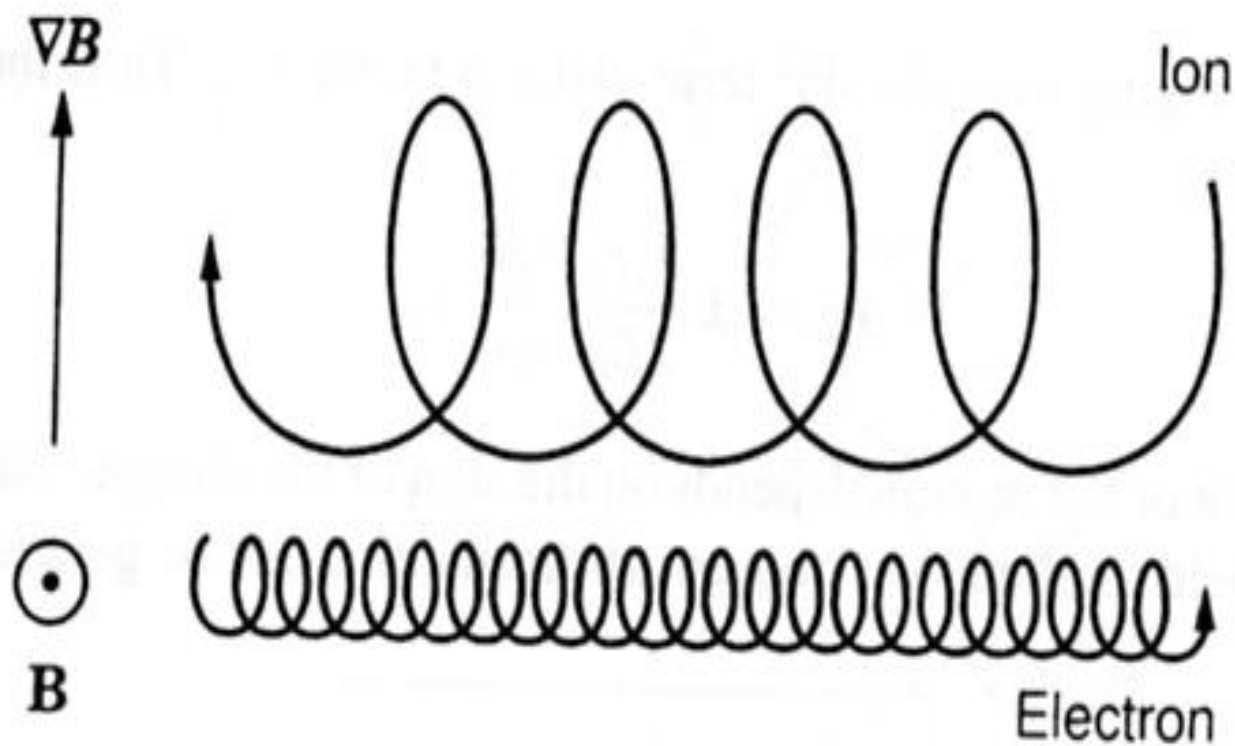
1.4.1 梯度漂移

现在让我们假定磁场是弱非均匀的,比如在图1-4中所示的是向上方向增大的。粒子的回旋半径在向上方向上减小,在轨道的下半部分要大于上半部分。因此,离子和电子在相反方向上垂直于 $\mathbf{B}$ 和 ∇B 漂移。

由于我们假定磁场梯度典型的尺度长度远大于粒子回旋半径,我们可以对磁场矢量在粒子的引导中心Taylor展开

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 \dots \dots \dots (1.28)$$

图1-4 磁场梯度引起的粒子漂移



其中 $\mathbf{B}_0$ 假定为在引导中心取值， $\mathbf{r}$ 是离引导中心的距离。将该式代入方程(1.8)后得到

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) + q[\mathbf{v} \times (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0] \dots\dots\dots(1.29)$$

把速度项展开为回旋和漂移运动 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_g + \mathbf{v}_\nabla$ ，并注意到 $v_\nabla \ll v_g$ 可得

$$m \frac{d\mathbf{v}_\nabla}{dt} = q(\mathbf{v}_\nabla \times \mathbf{B}_0) + q[\mathbf{v}_g \times (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0] \dots\dots\dots(1.30)$$

其中省掉了描述均匀场中的回旋项,也忽略了小量 $\mathbf{v}_\nabla \times (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0$ 。由于我们对远大于回旋周期的时间尺度感兴趣,我们可以做回旋平均，据此，由于当运动到弱场区时粒子的任何加速会被它另一半回旋轨道的强场区的减速平衡掉，方程的左边为零。由于我们知道， $\mathbf{v}_\nabla$ 是在垂直于磁场的平面内，可以用 $\mathbf{B}_0 / B_0^2$ 叉乘后求出

$$\mathbf{v}_\nabla = \frac{1}{B_0^2} \left\langle \left(\mathbf{v}_g \times (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 \right) \times \mathbf{B}_0 \right\rangle \dots\dots\dots(1.31)$$

其中角括号表示回旋平均。假定磁场只在 x 方向变化 $\mathbf{B}_0 = B_0(x)\mathbf{e}_x$ ，我们得到

$$\mathbf{v}_\nabla = -\frac{1}{B_0} \left\langle \mathbf{v}_g x \frac{dB_0}{dx} \right\rangle \dots\dots\dots (1.32)$$

利用方程(1.13)给定的表达式置换 $\mathbf{v}_g$ 和 x 后得到

$$v_{\nabla x} = -\frac{v_\perp r_g}{B_0} \left\langle \sin \omega_g t \cos \omega_g t \frac{dB_0}{dx} \right\rangle \dots\dots\dots (1.33a)$$

$$v_{\nabla y} = \frac{v_\perp r_g}{B_0} \left\langle \sin^2 \omega_g t \frac{dB_0}{dx} \right\rangle \dots\dots\dots (1.33b)$$

取回旋平均后,方程(1.33a)中因含sine和cosine的乘积而被平均掉,方程(1.33b)中含sine的平方而平均得到1/2。这样。漂移将只有y方向

$$\mathbf{v}_\nabla = \pm \frac{v_\perp r_g}{2B_0} \frac{\partial B_0}{\partial x} \mathbf{e}_y \dots\dots\dots (1.34)$$

这里运动方向与电荷的符号有关.由于磁场梯度方向是任意选择

的,该式可以推广为

$$\mathbf{v}_{\nabla} = \frac{mv_{\perp}^2}{2qB^3} (\mathbf{B} \times \nabla B) = \frac{w_{\perp}}{qB^3} (\mathbf{B} \times \nabla B) \dots\dots\dots (1.35)$$

它表明, 磁场梯度会引起与磁场及其梯度两个方向都垂直的梯度漂移(**gradient drift**), 如图1-4示意地表示的。

方程(1.35)表明, 离子和电子是在相反方向漂移,而且梯度漂移速度与粒子的垂直能量成正比例。能量越高的粒子, 因为它们有更大的回旋半径并经历更大的磁场非均匀性, 漂移越快。

与极化漂移一样, 电子和离子反向漂移会引起横向电流, 该梯度漂移电流(**gradient drift current**)具有如下形式

$$\mathbf{j}_{\nabla} = en_e (\mathbf{v}_{\nabla i} - \mathbf{v}_{\nabla e}) = \frac{n_e (\mu_i + \mu_e)}{B^2} \mathbf{B} \times \nabla B \dots\dots\dots (1.36)$$

这里采用了描述粒子垂直能量与磁场之比的磁矩(**magnetic moment**)定义:

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \frac{w_{\perp}}{B} \dots\dots\dots (1.37)$$

1.4.2 广义的力漂移

利用方程(1.1)，用 $\mathbf{F}/q$ 置换方程(1.19)中的电场 $\mathbf{E}$ ，我们得到引导中心漂移的更一般形式，它不仅适用于Coulomb力，而且也适用于作用在磁场中的带电粒子上的任何力

$$\mathbf{v}_F = \frac{1}{\omega_g} \left(\frac{\mathbf{F}}{m} \times \frac{\mathbf{B}}{B} \right) \dots\dots\dots(1.38)$$

当粒子的漂移速度远小于它的回旋速度时，所有的粒子漂移总可以用适当的力项来描述。在梯度漂移，极化漂移，和重力漂移情况下，这些力可以分别写成

$$\mathbf{F}_\nabla = -\mu \nabla B \dots\dots\dots(1.39)$$

$$\mathbf{F}_p = -m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \dots\dots\dots(1.40)$$

$$\mathbf{F}_G = m\mathbf{g} \dots\dots\dots(1.41)$$

其中重力一般远小于其它力，除了太阳表面附近的过程外，通常都可以忽略掉重力作用。

方程(1.38)表明,所有的力都引起漂移,只是与电荷符号有关的Coulomb力不一样,因为 ω_g 带着电荷符号。对于这些漂移,电子和离子流入相反的方向,产生横向电流.而且这些漂移与带电粒子的质量有关,因此电子和离子的漂移速度是很不相同的。

1.4.3. 曲率漂移

梯度漂移只是非均匀磁场中粒子漂移的一个分量。当磁场线是弯曲的情况下,就会出现曲率漂移(curvature drift)。由于粒子有平行速度 $v_{//}$, 粒子要受到一个惯性离心力

$$F_R = m v_{//}^2 \mathbf{R}_c / R_c^2 \dots\dots\dots (1.42)$$

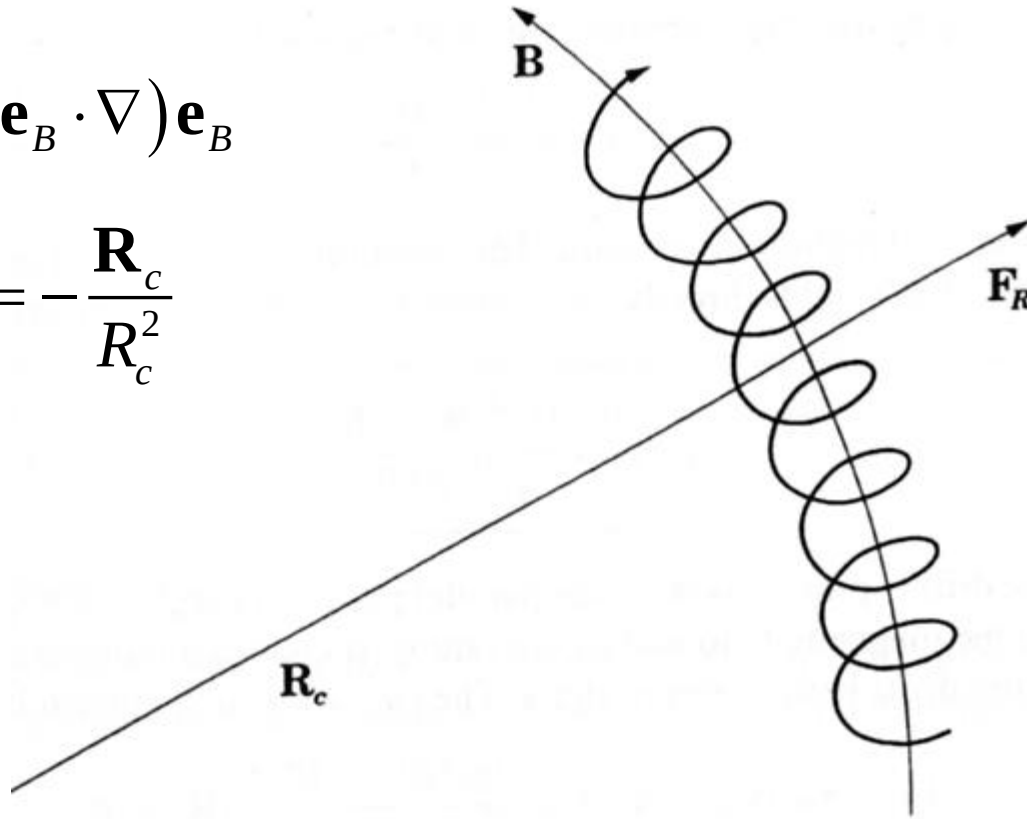
其中 R_c 是局域曲率半径,其方向从局域曲率中心指向粒子位置(见图1-5)。将方程(1.42)代入(1.38)就直接得到曲率漂移速度

$$\mathbf{v}_R = m v_{//}^2 [(\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}) / (q R_c^2 B^2)] = 2w_{//} [(\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}) / (q R_c^2 B^2)] \dots\dots (1.43)$$

率漂移是与粒子平行能量 $w_{//}$ 成正比例的, 并且漂移方向是垂直于磁场和它的曲率半径的。由于电子和离子漂移方向相反, 将产生横场电流。曲率漂移电流(curvature drift current)为

图1-5 粒子沿弯曲磁场线运动感受到的离心力

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{e}_B}{dl} &= (\mathbf{e}_B \cdot \nabla) \mathbf{e}_B \\ &= -\frac{\mathbf{e}_R}{R_c} = -\frac{\mathbf{R}_c}{R_c^2}\end{aligned}$$



$$\mathbf{j}_R = en_e(v_{Ri} - v_{Re}) = 2n_e (w_{i//} + w_{e//}) [(\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}) / (R_c^2 B^2)] \dots \dots (1.44)$$

与相关的漂移一样，曲率漂移电流方向是垂直于磁场线的曲率半径和磁场本身的。

在柱对称磁场中，可以得出 $-\nabla B = (B/R_c^2)\mathbf{R}_c$ ，这样我们可以将梯度漂移和曲率漂移加在一起得到总的磁漂移

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_R + \mathbf{v}_\nabla = (v_{//}^2 + v_\perp^2 / 2) [(\mathbf{B} \times \Delta \mathbf{B}) / (\omega_g B^2)] \dots \dots \dots (1.45)$$

与这种完全磁漂移相关的横向电流产生了磁层环电流，详见下一章。

1.5. 绝热不变量

在上一节里我们已经遇到了粒子的磁矩 $\mu = w_\perp^2 / B$ ，该量已被处理为粒子的特征常数，这种量称为绝热不变量(adiabatic invariants)。与总能量或总动量不同，绝热不变量并不是绝对不变的常数，而是可以随时间和空间变化的。但是，它们与

粒子运动的某些周期性比起来是缓慢变化的。所谓磁场随空间和时间的缓慢变化条件(也称为绝热条件)可表示成:

$$\begin{cases} |\mathbf{L} \cdot \nabla B| \ll B \\ \tau \left| \frac{\partial B}{\partial t} \right| \ll B \end{cases} \dots\dots\dots(1.46)$$

其中 $|\mathbf{L}|$ 和 τ 分别表示磁场在空间和时间上发生明显变化所要经过的长度和时间, 称为特征长度和特征时间。

对于电磁场中的粒子, 绝热不变量是与粒子可能进行的每一种运动相联系的。磁矩 μ 是与围绕磁场的回旋运动相联系的。纵向不变量 J 是与沿磁场的纵向运动相联系的。第三不变量 Φ 是与垂直漂移相联系的。每种周期性运动都有相应的特征长度和特征时间。下面将分别讨论它们。

根据哈密顿(Hamilton)力学, 若系统中粒子运动是周期性的, 并且系统变化的角频率远小于周期运动之一的振荡频率, 那么作用积分

$$J_i = \oint p_i dq_i$$

是一个运动常数并且描述一个绝热不变量。变量 (p_i, q_i) 是哈

米顿 (Hamilton) 力学的广义动量和坐标，并且积分必须是沿着坐标 q_i 的一个完整的回路进行.

1.5.1. 磁矩 (magnetic moment)

为了说明当粒子运动到较强或较弱磁场时粒子的磁矩不变化, 我们考虑能量守恒方程

$$W = W_{\parallel} + W_{\perp} \dots\dots\dots(1.47)$$

在没有电场的情况下由于总能量是常数，它的时间导数应为零：

$$dW_{\parallel} / dt + W_{\perp} / dt = 0 \dots\dots\dots(1.48)$$

对于横向能量，我们利用方程(1.37)， $W_{\perp} = \mu B$ ，可以得到

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = \mu \frac{dB}{dt} + B \frac{d\mu}{dt} \dots\dots\dots(1.49)$$

这里 $dB/dt = v_{\parallel} dB/ds$ 是粒子沿它的引导中心轨道看到的磁场变化。磁场本身假定是时间常数。平行粒子能量可以从方程(1.39)中梯度力的平行分量推导出，于是平行运动方程为

$$m dv_{\parallel} / dt = -\mu \Delta B = -\mu dB/ds \dots\dots\dots(1.50)$$

用 $v_{\parallel}$ 乘方程(1.50)的左边，而用它的等同量 ds/dt 乘方程的右边后，可以得到平行能量的时间导数为

$$dw_{//} / dt + = - \mu dB / dt \dots\dots\dots(1.51)$$

将方程(1.49)和(1.51)相加并观察方程(1.48)后，我们得到

$$dw_{//} / dt + w_{\perp} / dt = B d \mu / dt = 0 \dots\dots\dots(1.52)$$

由此立即得出，磁矩是一个运动常数，当沿粒子路径磁场变化时出现回旋频率或回旋半径的小变化不会影响磁矩。

至此，我们已忽略了电场，而电场能加速粒子。由于楞次定律公式 $\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E}$ ，我们就忽略了磁场的时间变化。但是，当磁场涨落足够慢时，磁矩还是守恒的，这可以通过考虑电场引起的垂直粒子能量的变化来说明。垂直粒子能量的变化可以通过用 $\mathbf{v}_{\perp}$ 点乘方程(1.7)来计算

$$\frac{dw_{\perp}}{dt} = q(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_{\perp}) \dots\dots\dots(1.53)$$

回旋一周增加的能量由回旋周期内的积分得到

$$\Delta w_{\perp} = q \int_0^{2\pi/\omega_g} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_{\perp}) dt \dots \dots \dots (1.54)$$

如果磁场变化缓慢，粒子轨道是闭合的，我们可以用沿无扰动轨道的线积分来代替对时间的积分。利用斯托克斯 (Stokes) 公式和Maxwell方程，我们得到

$$\Delta w_{\perp} = q \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q \int_A (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} = -q \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} \dots \dots \dots (1.55)$$

其中 $d\mathbf{s} = \mathbf{t}ds$ 是闭合回旋轨道 C 的线元 ds 与线元的切向矢量 $\mathbf{t}$ 的乘积, $d\mathbf{A} = \mathbf{n}dA$ 是由轨道包围的平面 A 的面元 dA 与面元的法向矢量 $\mathbf{n}$ 的乘积。当场的变化时间远比回旋周期长时, 可以用 $\omega_g \Delta B / 2\pi$ 代替 $\partial \mathbf{B} / \partial t$, 而 ΔB 是一个回旋周期内的变化, 这样得到

$$\Delta w_{\perp} = \frac{1}{2} q \omega_g r_g^2 \Delta B = \mu \Delta B \dots \dots \dots (1.56)$$

这里用了方程 (1. 12) 和 (1. 14) 定义的回旋频率和回旋半径, 也用

到了方程(1.37)定义的磁矩。另一方面。在方程(1.49)中，垂直能量的变化给定为

$$\Delta w_{\perp} = \mu \Delta B + B \Delta \mu \dots\dots\dots(1.57)$$

比较最后的两个方程后,我们再次得到

$$\Delta \mu = 0 \dots\dots\dots(1.58)$$

它表明，在慢变化磁场近似下，即使粒子在感应电场中被加速，磁矩还是守恒的。

类似地,电场的时间慢变化并不破坏磁矩守恒，因为它们将在方程(1.55)右边只产生磁场的二级时间变化 $\partial^2 B / \partial t^2$ ，是可以忽略的。对于所有的慢变化，磁矩是一个运动常数，场的变化仅仅只是引起粒子不同类型的漂移，而磁矩还是守恒的。

根据磁矩的绝热不变性，也能得到通过回旋粒子所圈定的面的磁通量 Φ_{μ} 也是不变化的。该磁通量为 $\Phi_{\mu} = \pi r_g^2 B$ ，或利用回旋半径的定义(1.14)式和磁矩的定义(1.37)式得到

$$\Phi_{\mu} = \frac{2\pi m}{q^2} \mu = const \dots\dots\dots(1.59)$$

因此，当粒子运动到更强磁场区域时，它的回旋半径会越来越小，但它的轨道所圈定的磁通量仍然是常数。

1.5.2. 磁镜(magnetic mirror)

若允许粒子的引导中心沿非均匀磁场运动，让我们考虑它的磁矩

$$\mu = \frac{mv^2 \sin^2 \alpha}{2B} \dots\dots\dots(1.60)$$

这里我们用 $v \sin \alpha$ 代替了 $v_{\perp}$ ，用到了方程(1.15)定义的投掷角。由于磁矩是不变量且总能量是运动常数，当磁场沿引导中心轨道增大或减小时只有投掷角能变化。上面的方程也表明，在不同位置上粒子的投掷角直接与这些位置上的磁场强度有如下关系

$$\frac{\sin^2 \alpha_2}{\sin^2 \alpha_1} = \frac{B_2}{B_1} \dots\dots\dots(1.61)$$

于是，知道了粒子在一个位置上的投掷角，就能计算其它所有位置上的投掷角。

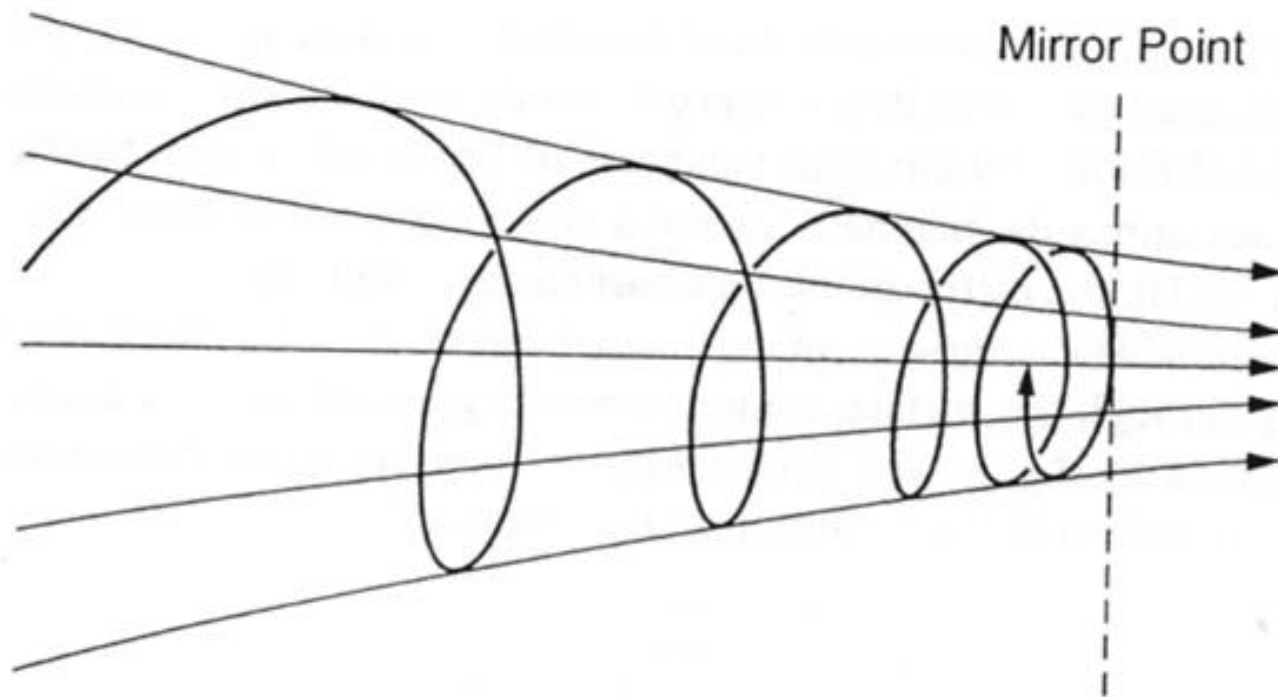
在一个会聚的磁场结构中，运动到更强磁场区域的粒子将有更大的投掷角，因而将减小它的平行能量 $w_{\parallel}$ 而增大垂直能量 $w_{\perp}$ 。如果 B_m 是沿磁场线投掷角 $\alpha = 90^\circ$ 时的一个点，那么粒子将从镜点 (mirror point) 反射。在该点粒子的所有能量是垂直能量 $w_{\perp}$ ，粒子不能再向前运动而被方程 (1.39) 给定的梯度力的平行分量即所谓磁镜力 (mirror force) $-\mu \nabla_{\parallel} B$ 反推回来，粒子的这种镜反射如图 1-6 所示。

在中间有最小磁场而两边是会聚磁场线的对称磁场结构中，如像偶极子磁场那样，这种磁结构称为磁瓶 (magnetic bottle)，粒子可能在它的两个磁镜点之间来回振荡而变成捕获粒子 (trapped particle)。在此情况下，我们可以把指定位置处粒子的投掷角描述为

$$\sin \alpha = \left(\frac{B}{B_m} \right)^{1/2} \dots\dots\dots (1.62)$$

即指定位置的磁场强度与它的镜点的磁场强度之比。

图1-6 在会聚磁场中粒子的轨道和镜反射



1.5.3. 绝热加热

上述的磁镜效应是当粒子沿磁场线运动时磁矩不变性的结果。磁矩守恒在粒子横越磁场线漂移时也是重要的效应。考虑粒子沿它的漂移路径从磁场强度为 B_1 的区域运动到更大磁场强度 B_2 的区域，由于磁矩守恒，我们得到

$$\frac{w_{\perp 2}}{w_{\perp 1}} = \frac{B_2}{B_1} > 1 \dots \dots \dots (1.63)$$

即有 $w_{\perp 2} > w_{\perp 1}$ 。但是，与磁镜情况不同，这时粒子将不来回振荡并且垂直能量继续增大。所以，粒子对流输运到更强磁场区会在横向方向获得能量增大而停止下来。对此过程需考虑的是把粒子输送到更强磁场区的漂移运动。该类型的粒子增能称为绝热加热(adiabatic heating)，是一些类型的原子感应加速器加速(betatron acceleration)的原理。该过程增大粒子的垂直能量而不影响它的平行能量，这样就产生了粒子能量的各向异性。但是，由于磁场也可以在平行方向变化，我们将在引入第二绝热不变量之后以更一般的方式再讨论这种各向异性的产生机制。

1.5.4. 纵向不变量

如果磁场具有磁镜结构，磁场线在两边会聚成偶极子磁场那样，就存在第二绝热不变量 J 的可能性。在这种会聚磁场中运动的粒子将从强磁场区反射并能以某个振荡频率 ω_b (bounce frequency) 在这种磁场中振荡。纵向不变量(longitudinal invariant) 定义为

$$J = \int v_{\parallel} m ds。 \dots\dots\dots(1.64)$$

其中 $v_{\parallel}$ 是平行粒子速度， ds 是引导中心路径上的微分元，积分是在两个镜点之间一次完整的振荡范围内进行的。

对于频率 $\omega \ll \omega_b$ 的电磁变化，尽管由于磁场的慢变化会引起粒子路径和它的镜点有弱变化，纵向不变量还是一个常数。

1.5.5. 能量各向异性

在垂直方向变化的磁场中，磁矩的不变性导致粒子垂直能量增大。当磁场也在平行于场线方向变化时，纵向不变量的守恒就意味着，当粒子沿着和横越磁场的漂移和振荡联合运动期间，粒子的平行能量也将变化。

让我们定义粒子的两个镜点之间磁场线的总长度为 l ,沿场线的平均平行速度为 $\langle v_{//} \rangle$ 。利用这些量,纵向不变量可以表示成

$$J = \int v_{//} m ds = 2ml \langle v_{//} \rangle \dots\dots(1.65)$$

在粒子从弱场区到强场区的漂移运动期间,粒子必定从长度为 l_1 的场线运动到另一条长度为 l_2 的场线上。同时,它的平均平行速度也从 $\langle v_{//} \rangle_1$ 变到 $\langle v_{//} \rangle_2$ 。纵向不变量的守恒意味着,平均平行能量将按照如下关系变化

$$\langle w_{//} \rangle_2 / \langle w_{//} \rangle_1 = l_1^2 / l_2^2 \dots\dots(1.66)$$

如果振荡路径的长度变短,粒子的平行能量就增加,这就是费米加速(Fermi acceleration)的基本原理。

该结果可以与方程(1.63)得到的垂直能量的同时增加联合起来确定粒子获得能量的各向异性。让我们定义能量各向异性为

$$A_w = \langle w_{\perp} \rangle / \langle w_{\parallel} \rangle \dots\dots\dots(1.67)$$

于是粒子的能量各向异性将按照如下关系变化

$$\frac{A_{w2}}{A_{w1}} = \frac{B_2}{B_1} \frac{l_2^2}{l_1^2} \dots\dots\dots(1.68)$$

该关系表明，只要场线长度的平方减小小于磁场增大，各向异性就增大。

1.5.6. 漂移不变量

在轴对称的磁镜磁场位形中的捕获粒子在它围绕磁场轴进行闭合的漂移壳(drift shell)周期轨道所围绕的磁通量简单地被定义为第三不变量。该不变量可以写成

$$\Phi = \oint v_d r d\psi \dots\dots\dots(1.69)$$

其中 v_d 是所有垂直漂移速度的和， ψ 是方位角，积分必须沿着粒子完整的圆漂移路径进行。

只要电磁场的典型频率远小于漂移频率 $\omega \ll \omega_d$ ， Φ 就是不变量，

并且实际上等于轨道所围绕的磁通量，这可以像方程(1.59)那样写成如下形式

$$\Phi = \frac{2\pi m}{q^2} M = \text{const} \dots \dots \dots (1.70)$$

其中 M 是轴对称磁场的磁矩。

1.5.7. 不变性的违反(violation of invariance)

至此，我们已考虑了使磁矩，纵向不变量，和漂移不变量守恒的变化和运动。但事实上所有的场可能变化使得一个或其它不变量的绝热不变性被违反。

频率高于粒子回旋频率 ($\omega > \omega_g$) 的时间变化将违反第一个绝热不变量-粒子的磁矩 μ 。磁场或电场都存在高频率变化，在此情况下，围绕引导中心的回旋轨道的概念变得无效，必须考虑完整的粒子运动。

另一方面，在扰动频率为 $\omega_g > \omega > \omega_b$ 情况下，磁矩 μ 是守恒的，引导中心近似对漂移运动还是有用的。但是，在此条件下，纵向不变量不再守恒而被违反，粒子的运动现在不能描述成沿场线在两个磁镜点之间的简单振荡。

最后，在扰动频率为 $(\omega_g, \omega_b) > \omega > \omega_d$ 情况下，头两个不变量将守恒，而漂移不变量将被违反。在磁场变化的影响下，粒子回旋和振荡，但将穿过漂移壳扩散。所有这些情况自然界都会实现，其中一些我们将在后面遇到。

绝热不变量被违反不仅发生场的变化时间变化时，而且也在场的空间变化的长度尺度 L 小于与绝热不变量有关的周期运动的特征半径 r_a 情况 ($L < r_a$)。在粒子跨越磁场梯度长度小于回旋半径 r_g 的磁场做回旋运动情况下就能证明这一点。在此情况下，利用方程(1.14)把粒子垂直速度写成为

$$v_{\perp} = \omega_g r_g \dots\dots\dots(1.71)$$

并用空间变化的梯度长度 L 除该式两边后得到

$$\omega = \frac{v_{\perp}}{L} = \omega_g \frac{r_g}{L} > \omega_g \dots\dots\dots(1.72)$$

因此对于回旋粒子,场变化的等效频率高于它的回旋频率 $\omega > \omega_g$, 且在长度尺度 $L < r_g$ 内强烈变化的磁场中回旋的粒子的磁矩不是绝热不变量. 类似的阐述也适用于另外两个绝热不变量.

1.6. 结语

在结束本章时，必须记住：引导中心理论假定电磁场是预先给，它可以适用于外加场很强且粒子运动引起的变化又不大的地球空间等离子体，在粒子运动显著改变场的弱场区，引导中心理论不再适用，引导中心的概念就失去了意义。

引导中心漂移及其相应的横向电流表达式概要列在表1-1中，几个绝热不变量的守恒条件是场的时间变化频率要远小于相应周期运动的频率，场的空间变化尺度要远大于相应周期运动的特征长度。

这里要特别补充说明一点，在等离子体中还存在一种重要的横向电流--抗磁电流(diamagnetic current)。尽管在单粒子轨道描述中，抗磁电流没有意义，但它是一个特殊的概念，是宏观压力梯度现象产生的结果，忽略它会产生错误的结论。该电流的产生及其在等离子体物理研究中的重要应用将需要用到更完整的理论描述来阐述，这里先做简单介绍。

表1-1 引导中心漂移及其相应的横向电流表达式

$E \times B$ 漂移	$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$	无电流
极化漂移	$\mathbf{v}_p = \frac{1}{\omega_g B} \frac{d\mathbf{E}_\perp}{dt}$	$\mathbf{j}_p = \frac{n_e(m_i + m_e)}{B^2} \frac{d\mathbf{E}_\perp}{dt}$
梯度漂移	$\mathbf{v}_\nabla = \frac{mv_\perp^2}{2qB^3} (\mathbf{B} \times \nabla B)$	$\mathbf{j}_\nabla = \frac{n_e(\mu_i + \mu_e)}{B^2} (\mathbf{B} \times \nabla B)$
曲率漂移	$\mathbf{v}_R = \frac{mv_\perp^2}{qR_c^2 B^2} (\mathbf{R}_c \times \mathbf{B})$	$\mathbf{j}_R = \frac{2n_e(w_{i\perp} + w_{e\perp})}{R_c^2 B^2} (\mathbf{R}_c \times \mathbf{B})$

(等效) 压力
梯度漂移*

$$\mathbf{v}_{\nabla p} = -\frac{(\nabla p_\perp) \times \mathbf{B}}{qnB^2}$$

$$\mathbf{j}_M = \mathbf{j}_{\nabla p} = -\frac{(\nabla p_\perp) \times \mathbf{B}}{B^2}$$

1.6.1. 抗磁电流

正如前面1.2节所述,带电粒子在磁场中的回旋运动是抗磁性的。

回旋运动的圆轨道代表一个小圆电流,旋转的方向应当使小圆电流产生的磁场总是与外加磁场的方向相反,这种行为称为抗磁效应。也就是说,回旋运动的带电粒子对应于一个磁偶极矩矢量 $\mathbf{m} = -\mu\mathbf{B}/B$, 其中负号对应于抗磁性,即由回旋运动产生的磁场与粒子围绕的外加磁场方向相反,带电粒子磁矩的大小为 μ 。

假定存在大量粒子或粒子系综,粒子密度为 n_σ , 平均磁矩为 μ_σ , 该系综的磁矩密度(单位容积的磁偶极矩密度)或磁化密度为

$$\mathbf{M} = -\sum_{\sigma} n_{\sigma} \mu_{\sigma} \mathbf{B} / B = -\sum_{\sigma} n_{\sigma} \left\langle \frac{m_{\sigma} v_{\perp}^2}{2B} \right\rangle \frac{\mathbf{B}}{B} = -\frac{p_{\perp} \mathbf{B}}{B^2} \dots\dots\dots(1.73)$$

其中角括号代表对速度分布求平均。根据电磁理论,在磁场中的带电粒子系综具有的抗磁电流为

$$\mathbf{j}_M = \nabla \times \mathbf{M} = -\nabla \times \left(\frac{p_{\perp} \mathbf{B}}{B^2} \right) = -\frac{(\nabla p_{\perp}) \times \mathbf{B}}{B^2} \dots\dots\dots(1.74)$$

图1-7 磁化离子的密度梯度产生的抗磁电流
(沿虚曲线的方位方向)

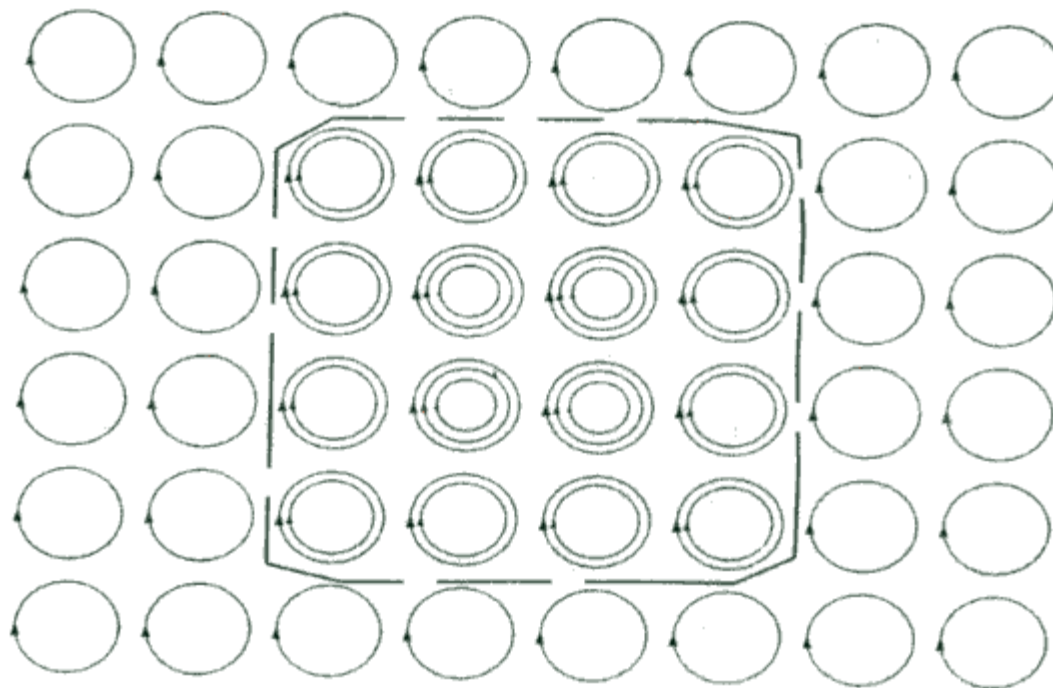


图1-7表示抗磁电流的物理来源, 其中所有离子都集体围绕磁场(方向由页面指向外)顺时针旋转, 虚曲线上的方位方向电流来自两种粒子的贡献: (1) 引导中心位于虚曲线内侧一个Larmor半径处的粒子和 (2) 引导中心位于虚曲线外侧一个Larmor半径处的粒子。对于虚曲线上的观察者来讲, 内侧粒子贡献顺时针电流, 而外侧粒子贡献逆时针电流。如果内侧和外侧粒子数不相等(这里内侧离子电流用一些同心圆表示), 那么两种反向的电流不能相互抵消而产生一个沿虚曲线的纯宏观电流。内侧和外侧粒子数不相等对应于一个密度梯度, 所以我们看到, 回旋运动粒子的径向梯度给定了一个纯宏观方位方向电流。类似地, 如果存在径向温度梯度, 内侧和外侧粒子群的速度差也会产生一个纯宏观方位电流。密度和温度梯度联合就产生了由方程(1.74)给定的与压力梯度有关的纯宏观电流。该宏观电流被称为抗磁电流, 因为它产生的磁场总是与外加磁场方向相反, 起抵消外加磁场的作用。

因此, 磁化等离子体中总的宏观横向电流应当是抗磁电流和几种漂移电流的总和:

$$\mathbf{j}_{\perp total} = \mathbf{j}_M + (\mathbf{j}_{\nabla} + \mathbf{j}_R + \mathbf{j}_p) = \mathbf{j}_{\nabla p} + (\mathbf{j}_{\nabla B} + \mathbf{j}_R + \mathbf{j}_p) \dots \dots (1.75)$$

第二章 捕获粒子

2.1 偶极子磁场

2.2 振荡运动

赤道投掷角、振荡周期、损失锥

2.3 漂移运动

磁漂移速度、电漂移

3.4 源和汇

绝热加热、损失过程

3.5 环电流

磁场扰动、磁暴

3.6 结语

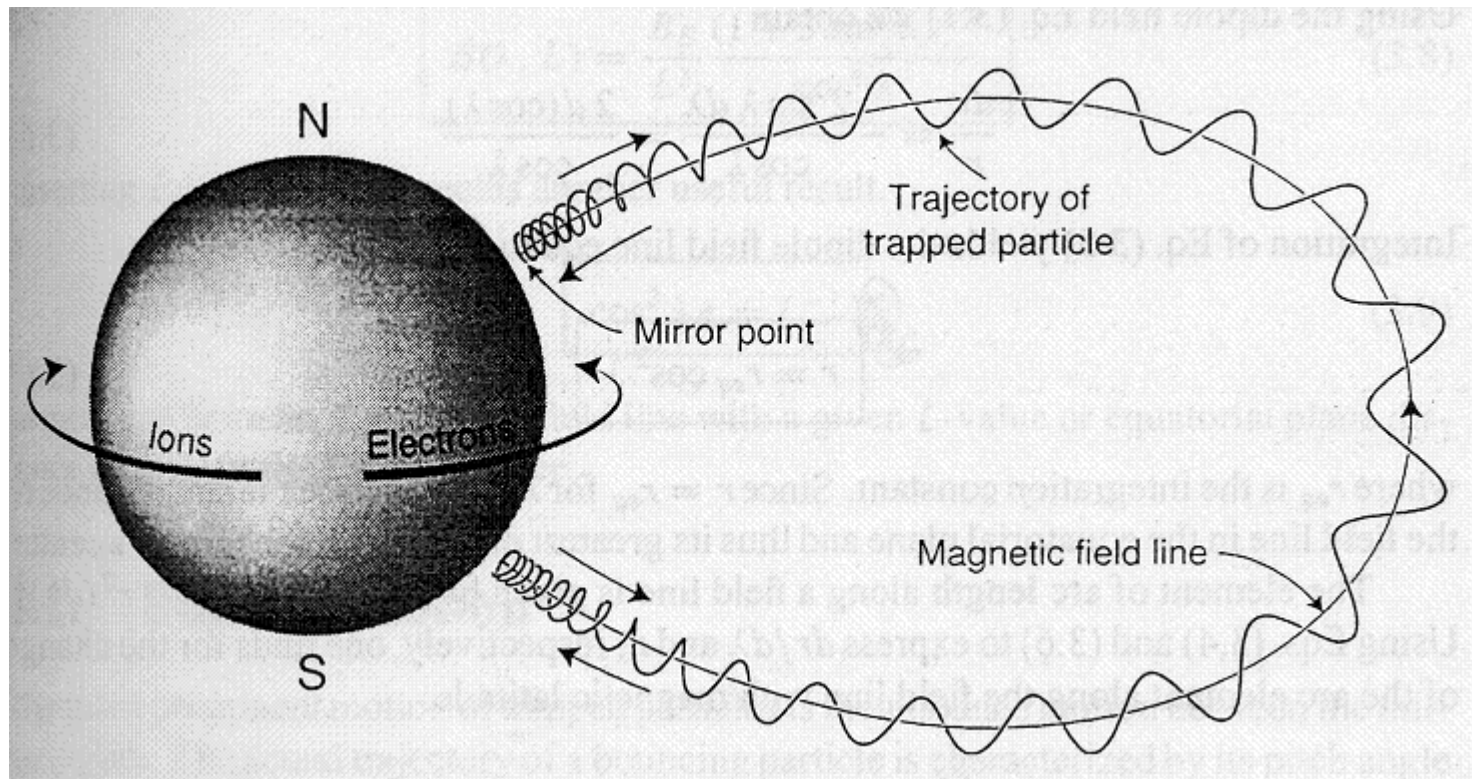
偶极磁场在其赤道上有磁场强度最小值而在两个半球有会聚场线。如前一章所述,在这种位形磁场中,粒子将被捕获并在南北两个半球的镜点之间来回振荡(见图2-1)。在地球磁场情况下。由于在约6个地球半径范围内可以用偶极磁场来近似。这些捕获粒子群就是辐射带中的高能粒子。该区离子的典型能量范围是在3和300keV之间。而电子能量范围约比离子低一个数量级。

粒子不仅做回旋和振荡运动,而且还做缓慢的方位漂移运动(见图2-1)。这种漂移是方程(1.45)描述的偶极磁场的梯度和曲率漂移。离子和电子的漂移方向相反,离子围绕地球向西漂移,电子向东漂移,与此漂移相关的电流构成了环电流。

2.1. 偶极磁场

在离地面不太远的距离上,地磁场可以用偶极磁场来作近似.引入地球偶极矩(Earth's dipole moment) $M_E = 8.05 \times 10^{22} \text{ Am}^2$, 并选择球坐标系(径向距离,磁纬)= (r, λ) , 可以把磁场写成

图2-1 闭合磁场线上捕获粒子的轨道



$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_E}{r^3} (-2 \sin \lambda \mathbf{e}_r + \cos \lambda \mathbf{e}_\lambda) \dots\dots\dots (2.1)$$

因为偶极磁场是方位对称的，这里 $\mathbf{e}_r$ 和 $\mathbf{e}_\lambda$ 是单位矢量。在指定位置上的偶极磁场强度容易得到

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_E}{r^3} (1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2} \dots\dots\dots (2.2)$$

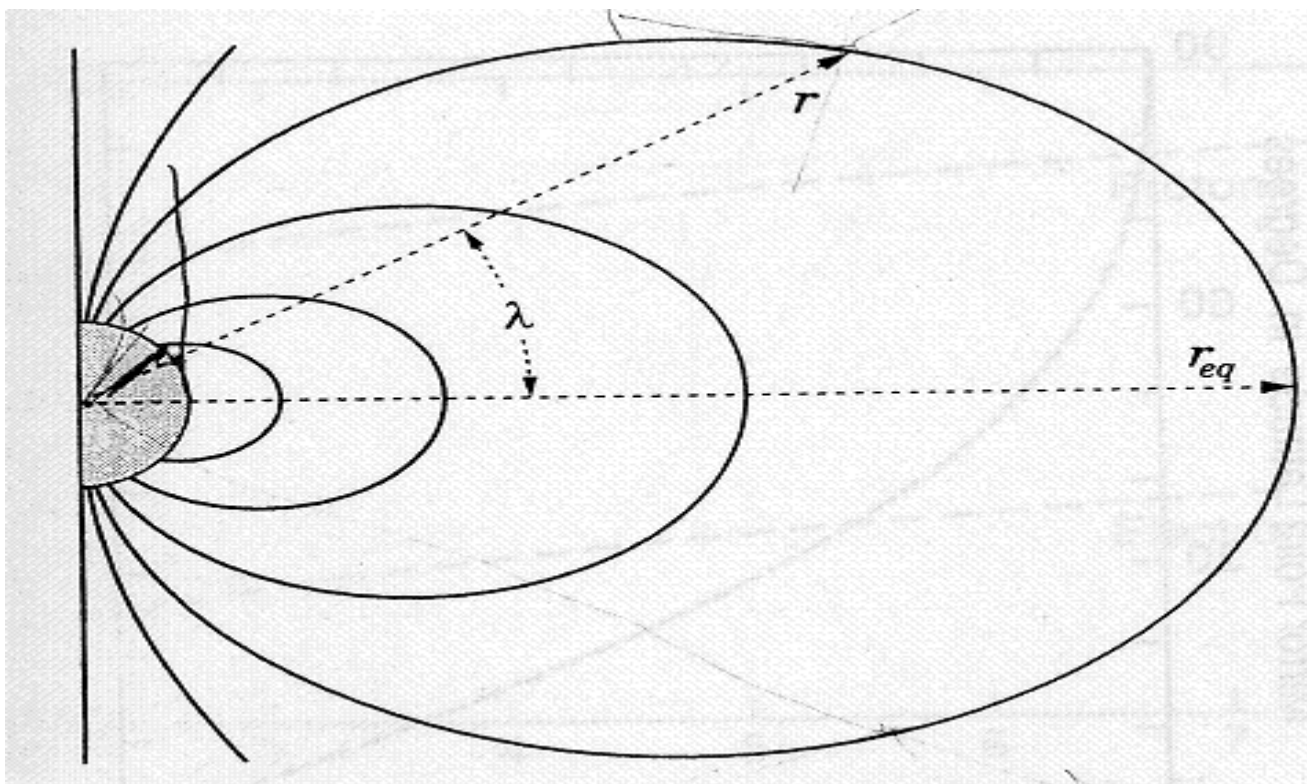
典型的偶极场磁场线如图2-2所示。为了该图中作出的磁场线图以及其它的许多应用的目的，需要知道所谓磁场线方程(field line equation) $r = f(\lambda)$ 。若 ds 是磁力线的弧元，磁力线就可以用微分方程定义为

$$ds \times \mathbf{B} = (B_r r d\lambda - B_\lambda dr) \mathbf{e}_\phi = 0 \dots\dots\dots (2.3)$$

因为磁场矢量总是与磁力线相切的。在轴对称磁场中,磁力线方程简化为

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\lambda}{B_\lambda} \dots\dots\dots (2.4)$$

图2-2 偶极磁场磁力线



利用偶极磁场方程(2.1)，我们得到

$$\frac{dr}{r} = -\frac{2 \sin \lambda d\lambda}{\cos \lambda} = \frac{2d(\cos \lambda)}{\cos \lambda} \dots\dots\dots(2.5)$$

积分方程(2.5)后得到偶极场磁场线方程

$$r = r_{eq} \cos^2 \lambda \dots\dots\dots(2.6)$$

其中 r_{eq} 为积分常数.由于当 $\lambda = 0$ 时, $r = r_{eq}$,所以 r_{eq} 是在赤道面上离磁场线的径向距离,它也是离地球中心的最大距离。

沿磁场线弧长单元给定为 $(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\lambda)^2$ 。利用方程(2.4)和(2.6),可以求出沿磁场线弧长单元随磁纬的变化

$$\frac{ds}{d\lambda} = r_{eq} \cos \lambda (1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2} \dots\dots\dots(2.7)$$

积分该式可计算出具有给定赤道距离的磁场线的长度。

有时,利用地球半径 R_E 作为距离单位并引入所谓 L 壳参数或 L 值(**L -shell parameter or L -value**), $L = r_{eq} / R_E$ 。利用地面上赤道磁场 B_E 和磁场线方程(2.6),可把方程(2.2)写成

$$B(\lambda, L) = \frac{B_E}{L^3} \frac{(1 + 3\sin^2 \lambda)^{1/2}}{\cos^6 \lambda} \dots\dots\dots(2.8)$$

其中 $B_E = \mu_0 M_E / (4\pi R_E^3) = 3.11 \times 10^{-5} T$ 为地球表面赤道上的磁场强度.将 L 的定义代入方程(2.6)得到另一个有用的结果

$$\cos^2 \lambda_E = \frac{1}{L} \dots\dots\dots(2.9)$$

即具有给定 L 值或给定赤道平面距离的磁场线与地球表面相交点的纬度为 λ_E 。

2.2. 振荡运动

捕获粒子最突出的运动是在两个磁镜点之间的振荡运动,振荡粒子的实际轨道用 (1.15)式定义的投掷角来表征。

2.2.1. 赤道投掷角

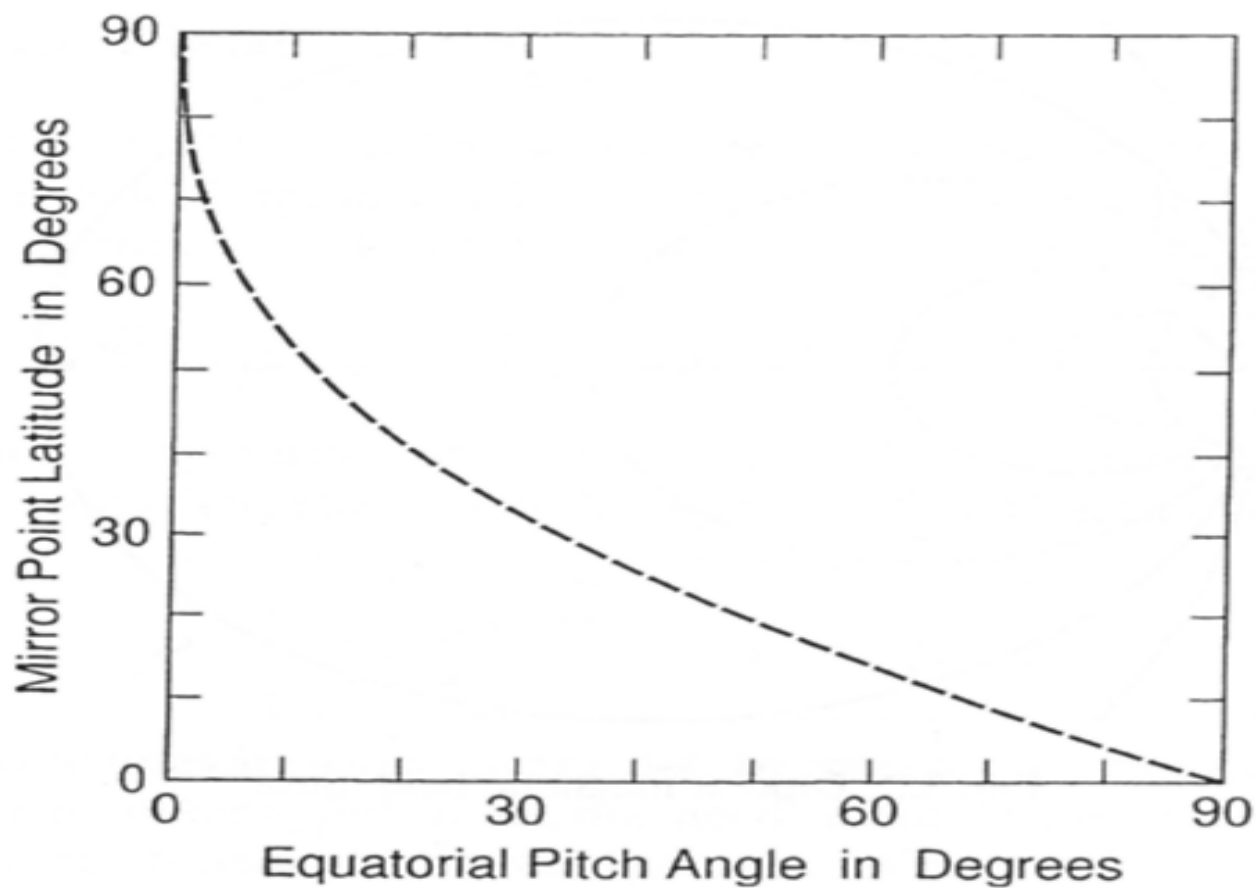
根据方程(1.62)我们知道,在磁镜磁场结构中,我们可以由沿着磁场线上任一点的磁场与粒子磁镜点的磁场之比值来确定粒子的投掷角.沿磁场线的一个特殊点是它与赤道面的交点,该点磁场有最小值 $B_{eq} = B_E / L^3$. 将方程(2.8)代入方程(1.62),我们得到赤道投掷角(equatorial pitch angle) α_{eq} 的表达式

$$\sin^2 \alpha_{eq} = \frac{B_{eq}}{B_m} = \frac{\cos^6 \lambda_m}{(1 + 3 \sin^2 \lambda_m)^{1/2}} \dots\dots\dots(2.10)$$

其中 λ_m 为粒子磁镜点的磁纬度。方程(2.10)表示, 粒子赤道投掷角只与它的磁镜点的磁纬度有关, 而与它的磁场线的赤道距离或相应的 L 值无关。反之, 粒子磁镜点的磁纬度只与它的赤道投掷角有关而与 L 值无关。

图2-3表示粒子的镜点磁纬度随那个粒子的赤道投掷角的变化。具有小赤道投掷角的粒子有大的平行速度, 并且它们的镜点是在靠近地球的高纬度上。随着赤道投掷角的增大, 镜点更向赤道纬度运动, 粒子镜点靠近赤道面。

图2-3 磁镜点的偶极纬度随赤道投掷角的变化



2.2.2. 振荡周期

振荡周期(bounce period) τ_b 是指粒子从赤道面出发运动到一个镜点,然后到另一个镜点再返回到赤道面所需的时间。沿磁场线在一个完整的振荡路径内对 $ds/v_{\parallel}$ 积分可得到

$$\tau_b = 4 \int_0^{\lambda_m} \frac{ds}{v_{\parallel}} = 4 \int_0^{\lambda_m} \frac{ds}{d\lambda} \frac{d\lambda}{v_{\parallel}} \dots\dots\dots(2.11)$$

利用方程(1.61)和(2.10)可以得到

$$v_{\parallel} = v \left[1 - (B/B_{eq}) \sin^2 \alpha_{eq} \right]^{1/2}$$

再利用方程(2.7)和(2.8)得到 $ds/d\lambda$ 和磁场比 B/B_{eq} , 代入(2.11)后得到

$$\tau_b = 4 \frac{r_{eq}}{v} \int_0^{\lambda_m} \cos \lambda (1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2} \left[1 - \sin^2 \alpha_{eq} \frac{(1 + 3 \sin^2 \lambda)^{1/2}}{\cos^6 \lambda} \right]^{-1/2} d\lambda \dots(2.12)$$

上式中的积分可以数值计算,但通常用如下关系来近似表示:

$$\Gamma_{\alpha} \approx 1.30 - 0.56 \sin \alpha_{eq} \dots\dots\dots(2.13)$$

再用 L 和粒子能量 w 表示 r_{eq} 和 v 后,我们得到

$$\tau_b \approx \frac{LR_E}{(w/m)^{1/2}} (3.7 - 1.6 \sin \alpha_{eq}) \dots \dots \dots (2.14)$$

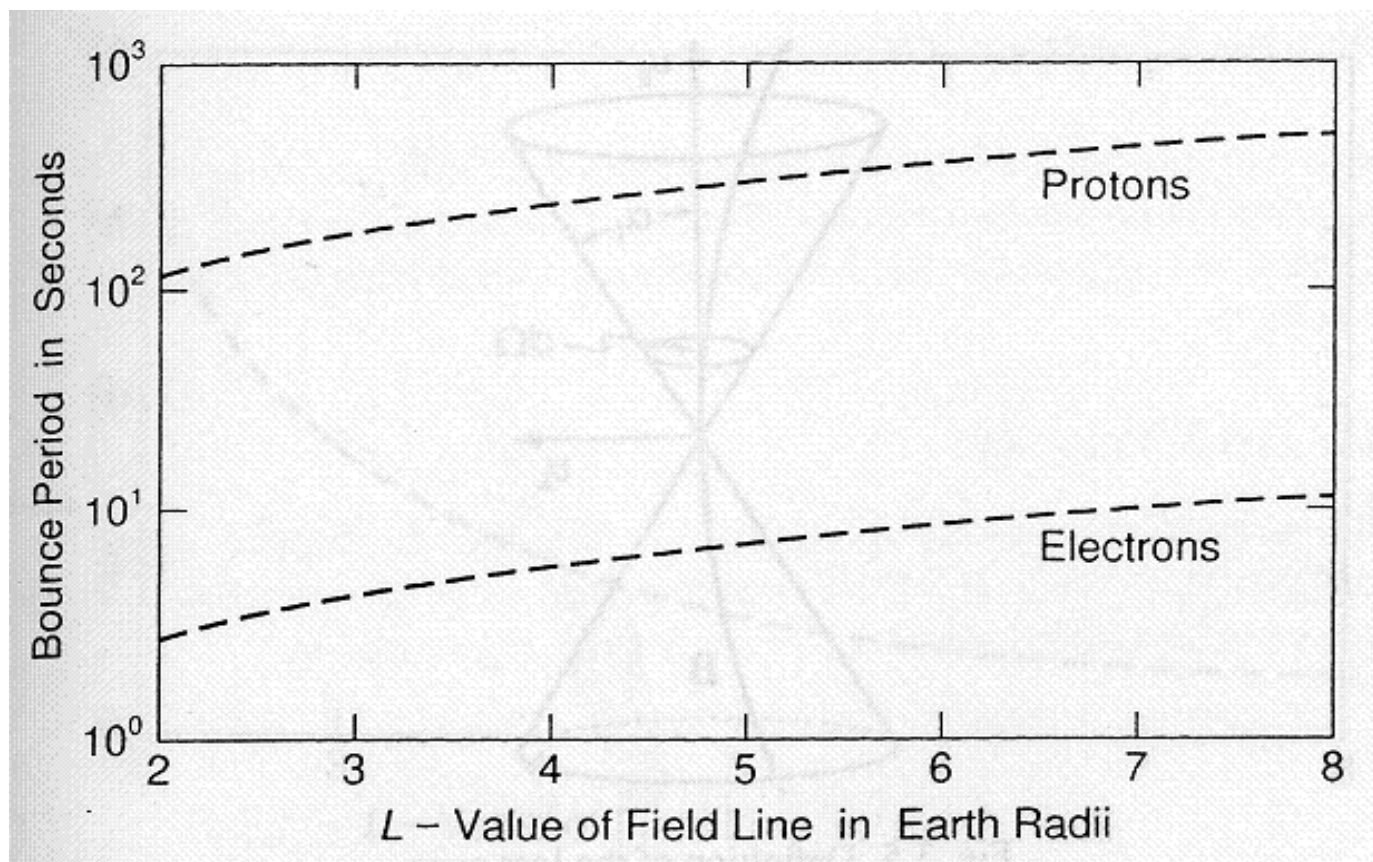
振荡周期与赤道投掷角只有很弱的关系,因为具有较小投掷角的粒子有较大的平行速度,到它们的镜点也有较长的路(见图2-3)。自然,场线越长,振荡周期越长;能量越高的粒子,振荡周期越短。

图2-4表示出能量为1-keV和 $\alpha_{eq} = 30^\circ$ 的电子和质子的振荡周期。电子较轻,典型的振荡周期为几秒;而质子较重,完成一次完整的振荡需要几分钟。如前所述,振荡周期必须远小于磁场的任何起伏周期,这样积分 $J = \int v_{||} m ds$ 才是绝热不变量。对于keV电子,这不是问题,但对于keV离子,第二绝热不变量可能就要被与离子振荡周期同量级的周期扰动(比如,地磁脉动)所违反。

2.2.3.损失锥(loss cone)

即使纵向不变量守恒,实际上也不是所有粒子都被捕获.如果粒子的镜点深处在大气层中,将与中性粒子频繁地碰撞而被大气吸收掉。粒子因碰撞损失掉的镜点高度约为100km以下。

图2-4 1-keV和 $\alpha_{eq} = 30^\circ$ 的电子和质子的振荡周期



简化起见，我们将采用零高度，因为地球表面和低电离层之间的磁场强度和镜点高度只差百分之几。在这种假定下，我们可以用方程(2.10)来定义赤道损失锥(equatorial loss cone)

$$\sin^2 \alpha_l = \frac{B_{eq}}{B_E} = \frac{\cos^6 \lambda_E}{(1 + 3 \sin^2 \lambda_E)^{1/2}} \dots\dots\dots(2.15)$$

图2-5表示出这种赤道损失锥的几何图形。赤道投掷角 $\alpha_{eq} < \alpha_l$ 并在立体角单元 $d\Omega$ 内的所有粒子都将损失在大气中。由于赤道投掷角 $\alpha_{eq} > 180^\circ - \alpha_l$ 的粒子将损失在另一半球的大气中，因此我们得到双损失锥结构。利用方程(2.9)可得到

$$\sin^2 \alpha_l = (4L^6 - 3L^5)^{-1/2} \dots\dots\dots(2.16)$$

该式表明，损失锥的宽度与粒子的电荷，质量，或能量都无关，而只是随磁场线半径(或 L 值)变化。如图2-6所示，对于赤道距离在 $3 R_E$ 以远的范围，赤道损失锥是很小的。在地球同步轨道($6.6R_E$)上，损失锥角小于3度。

图2-5 损失锥的定义

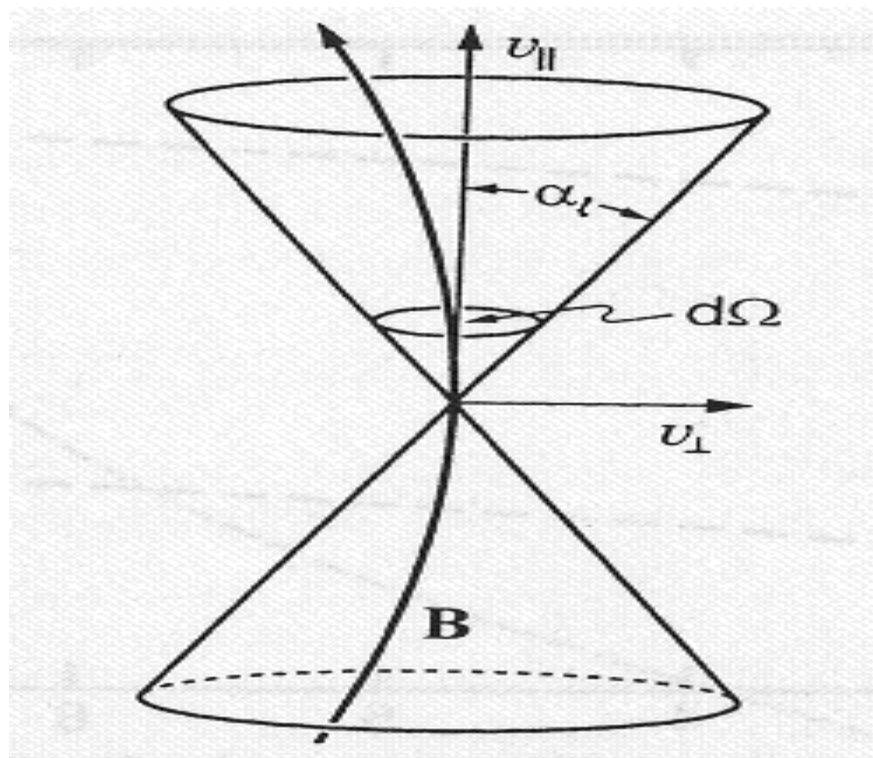
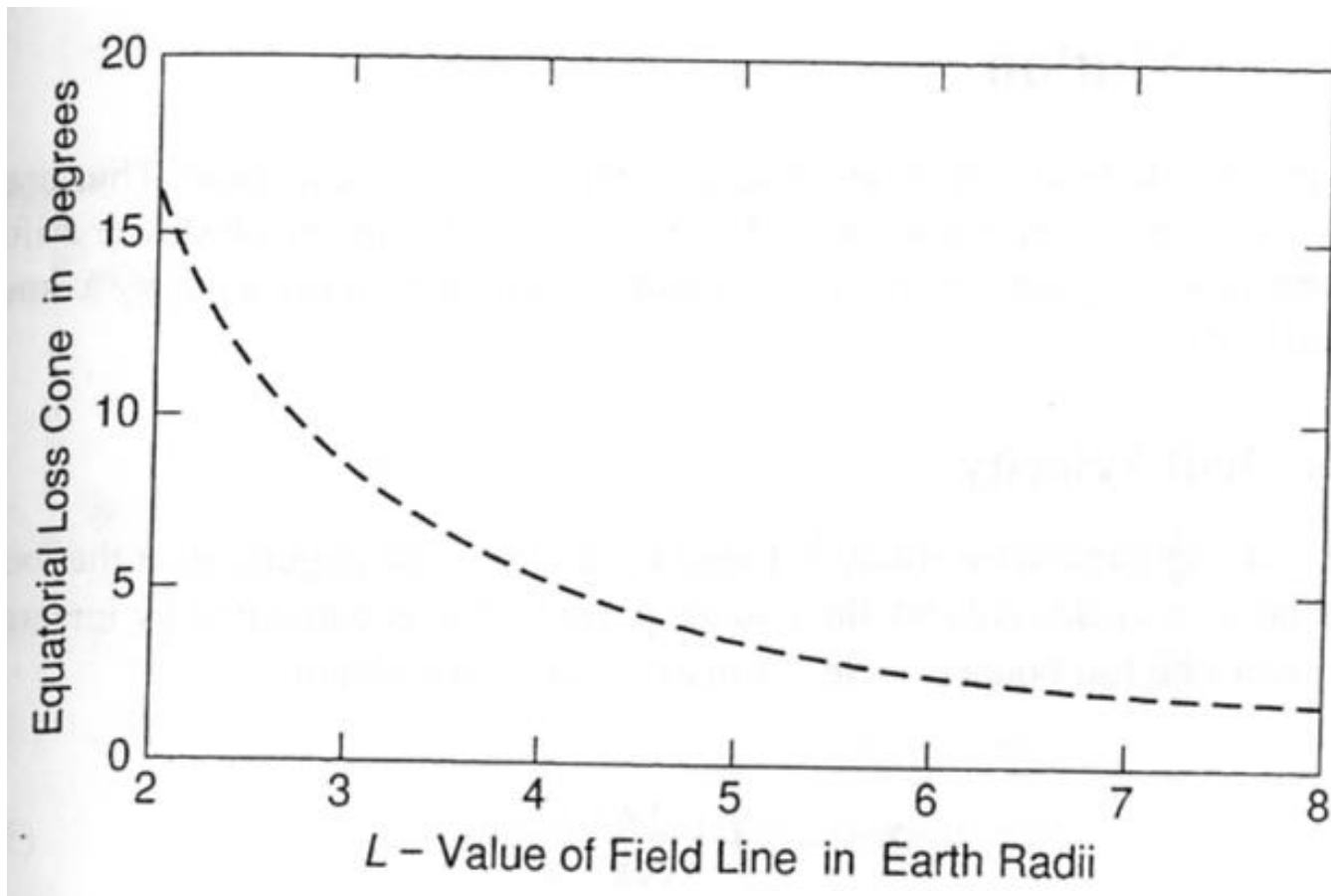


图2-6 不同 L 值对应的赤道损失锥



2.3. 漂移运动

偶极磁场中的粒子将同时进行回旋，振荡，和漂移运动。如果我们考虑比漂移运动更慢的情况，必须在前两种运动范围求积分。只要我们忽略电场，粒子就将经历纯方位磁漂移。

2.3.1. 磁漂移速度

赤道角漂移速度是用一个振荡周内的角漂移 $\Delta\psi$ 除以振荡周期来计算的。因此。在一个完整的振荡周内对 $v_d / r \cos \lambda$ 积分可计算出 $\Delta\psi$ 。再利用 $dt = ds / v_{\parallel}$ ，我们得到

$$\Delta\psi = 4 \int_0^{\lambda_m} \frac{v_d}{r \cos \lambda} \frac{ds}{v_{\parallel}} \dots\dots\dots(2.17)$$

我们可以用方程(1.45)来代替磁漂移速度，并允许在推导方程(2.12)时采用过的类似方法可以获得在一个完整振荡周内平均过的角漂移速度 $\langle \Omega_d \rangle = \Delta\psi / \tau_b$

$$\langle \Omega_d \rangle = \frac{6Lw}{qB_E R_E^2 \Gamma_\alpha} \int_0^{\lambda_m} \Psi(\alpha_{eq}, \lambda) d\lambda \dots \dots \dots (2.18)$$

其中 w 是粒子能量, Γ_α 是方程(2.12)和(2.13)中引入的积分。
函数 Ψ 是很复杂的, 积分必须数值计算。但对 Ψ 的积分与 Γ_α 的比可以有近似解为

$$\frac{1}{\Gamma_\alpha} \int_0^{\lambda_m} \Psi(\alpha_{eq}, \lambda) d\lambda \approx 0.35 + 0.15 \sin \alpha_{eq} \dots \dots \dots (2.19)$$

因此, 我们得到平均漂移周期 $\langle \tau_d \rangle = 2\pi \langle \Omega_d \rangle^{-1}$ 的近似式

$$\langle \tau_d \rangle \approx \frac{\pi q B_E R_E^2}{3Lw} (0.35 + 0.15 \sin \alpha_{eq})^{-1} \dots \dots \dots (2.20)$$

和平均漂移速度 $\langle v_d \rangle = 2\pi L R_E / \tau_d$ 的近似式

$$\langle v_d \rangle \approx \frac{6L^2 w}{q B_E R_E} (0.35 + 0.15 \sin \alpha_{eq}) \dots \dots \dots (2.21)$$

漂移周期和漂移速度都与粒子的电荷, 粒子的能量和 L 值有关, 而与粒子的质量关系不明显. 因此, 有相等能量并以相同速度

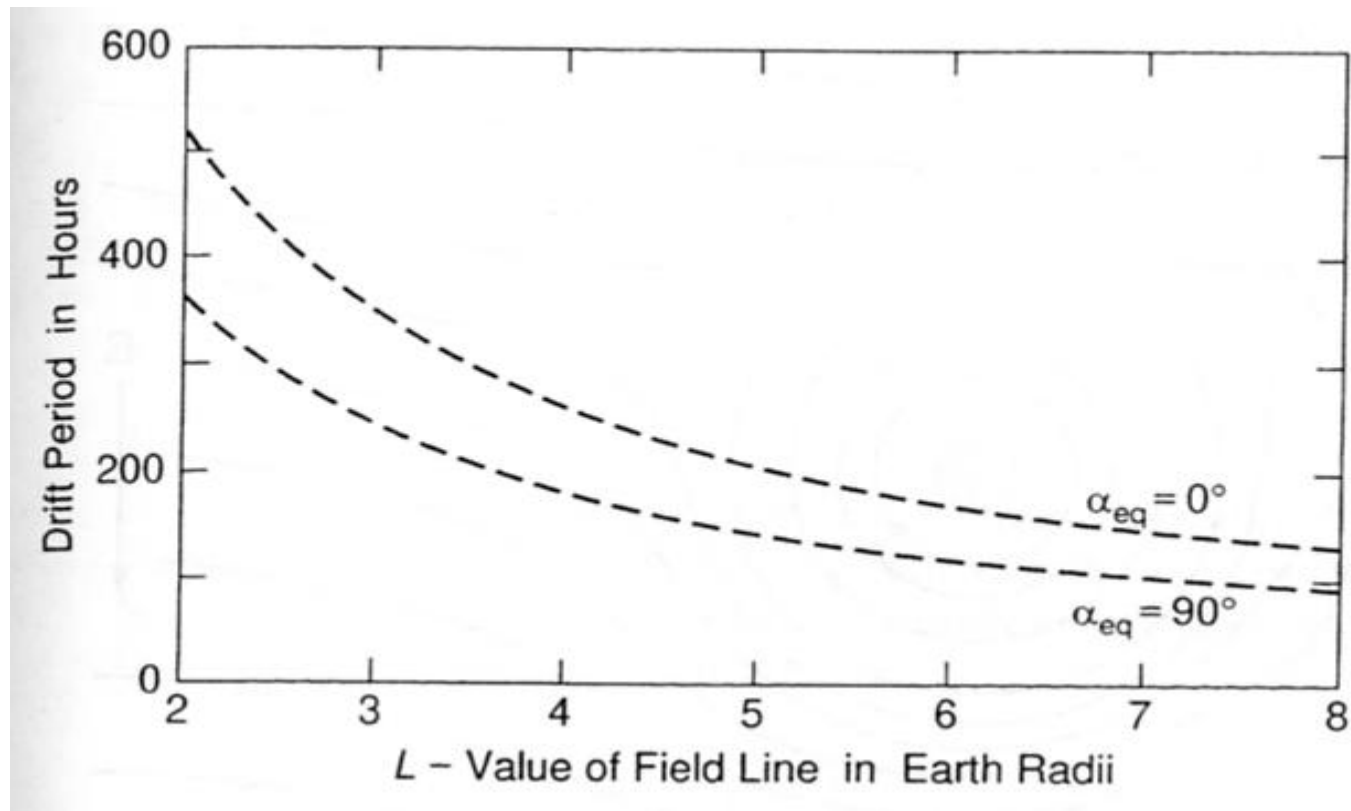
围绕地球漂移的电子和质子只是漂移方向相反. 由于漂移速度是与 L^2 成比例的, 在更远 L 壳上的漂移周期实际上更短。这是与更远粒子有更低方位速度的正常开普勒运动 (Keplerian motion) 相反的。图2-7给出方程 (2. 20) 的图形表示, 清楚地显示出这个效应。同时也表明。漂移周期 (和漂移速度) 只微弱地依赖于赤道投掷角。正如振荡周期的情况那样。

图2-7中可以看出, 1keV粒子的漂移周期是几天的量级。由于磁场变化更频繁, 对于10keV能量范围内的环电流粒子, 第三绝热不变量 Φ 很可能不守恒。许多环电流粒子经历穿过 L 壳的径向扩散或不能围绕地球完成一个完整的公转。只有在 MeV 能量范围内的多数环电流粒子有足够短的漂移周期能完成闭合的漂移轨道。

2. 3. 2. 电漂移

但是即使第三绝热不变量不违反, 外环电流中的粒子也不能完成闭合轨道。后面我们将看到的, 太阳风在磁层中产生电场, 其在赤道面内是在晨 (指向) - 昏的方向。这样粒子将经历 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$

图2-7能量为1keV而赤道投掷角不同的粒子的漂移周期



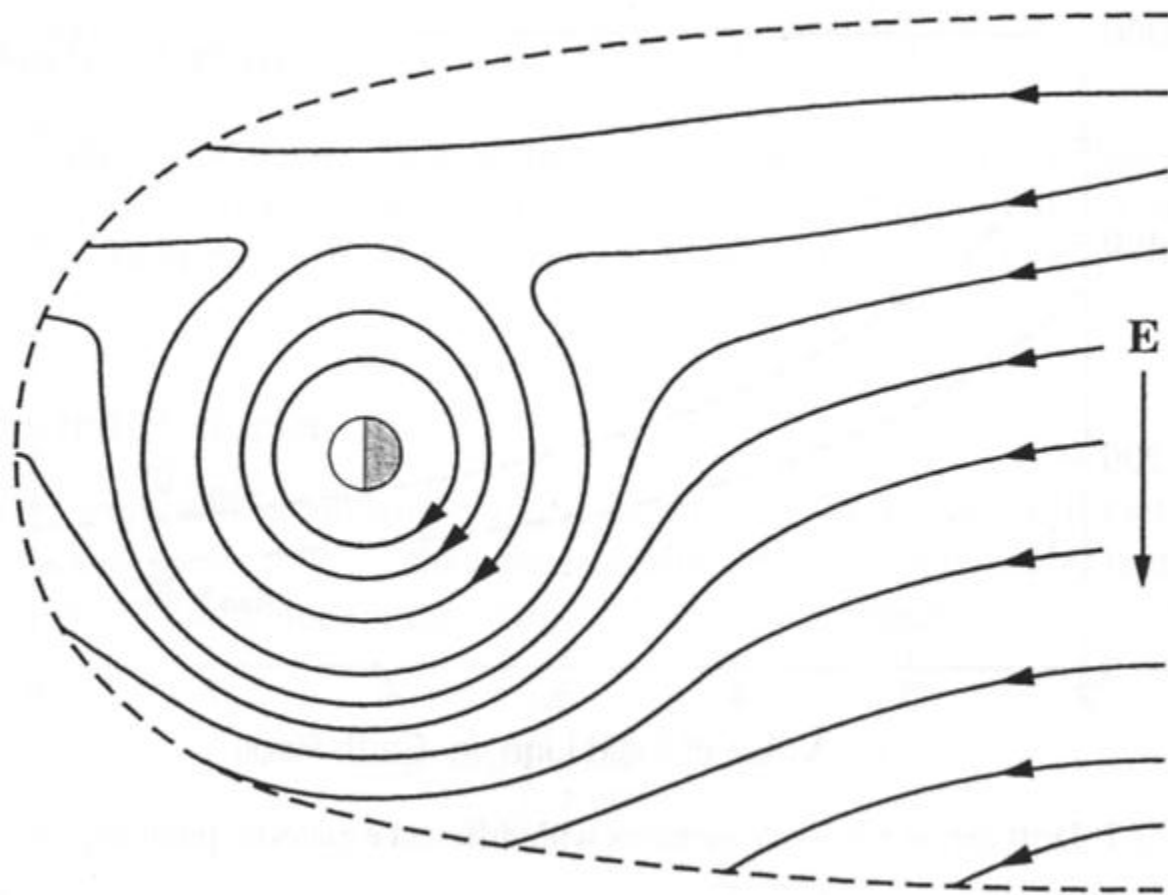
漂移。利用方程(1.19)和(2.8)可以得到由均匀赤道横向电场 E_{eq} 引起的赤道电漂移速度 v_E 表达式

$$v_E = \frac{E_{eq}}{B_{eq}} = \frac{E_{eq} L^3}{B_E} \dots\dots\dots(2.22)$$

镜点靠近赤道的电子和离子，除了它们是磁漂移外，还将以这个速度向着太阳方向漂移。

由于正离子的磁漂移方向向西，电漂移和磁漂移在黎明侧方向相反，而电子的两种漂移是在黄昏侧方向相反。由于磁漂移速度是与 L^2 成比例，而 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移是与 L^3 成比例，在某个径向距离之外范围电漂移将胜过磁漂移。因此，在联合电漂移和磁漂移情况下我们有图2-8所示的情景。在靠近地球的范围，磁漂移占优势，我们有一个对称的环电流(symmetric ring current)。在此之外范围，粒子轨道是 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 漂移占优势。在其中间区域，我们得到一个部分环电流(partial ring current)，它是地球周围向太阳方向漂移的粒子因梯度和曲率力引起的反射产生的。

图2-8 赤道面内高能离子漂移路径



在下面还将看到,实际的磁层电场并不是很均匀的,但高能粒子在实际电场中的轨道也与图2-8所示的情形很类似。

2.4 粒子源和汇

图2-8也表明,环电流的来源是磁尾等离子体片,粒子因电场漂移从磁尾带进来。当它们到达环电流区较强的偶极磁场时,它们开始受到磁场梯度和曲率力作用。

2.4.1. 绝热加热

由于粒子在它们向内漂移时遇到更强的磁场而又保持它们的磁矩,它们通过1.5.3节所述的原子感应加速器加速原理来绝热加速。赤道面内粒子的横向能量增大很容易通过把方程(2.8)代入方程(1.63)来计算

$$\frac{w_{\perp}}{w_{\perp 0}} = \left(\frac{L_0}{L} \right)^3 \dots\dots\dots(2.23)$$

其中 $w_{\perp 0}$ 代表粒子在开始遇到较强偶极磁场位置 L_0 时的横向能量。图2-9表示这种效应。具有赤道投掷角为 $\alpha_{eq} = 90^\circ$ 在 L_0 处开始的1keV粒子在向内漂移不到 $2 R_E$ 后能量 $w = w_{\perp}$ 已经翻一番了, 到 $L = 3$ 内侧时能量到达几10keV。

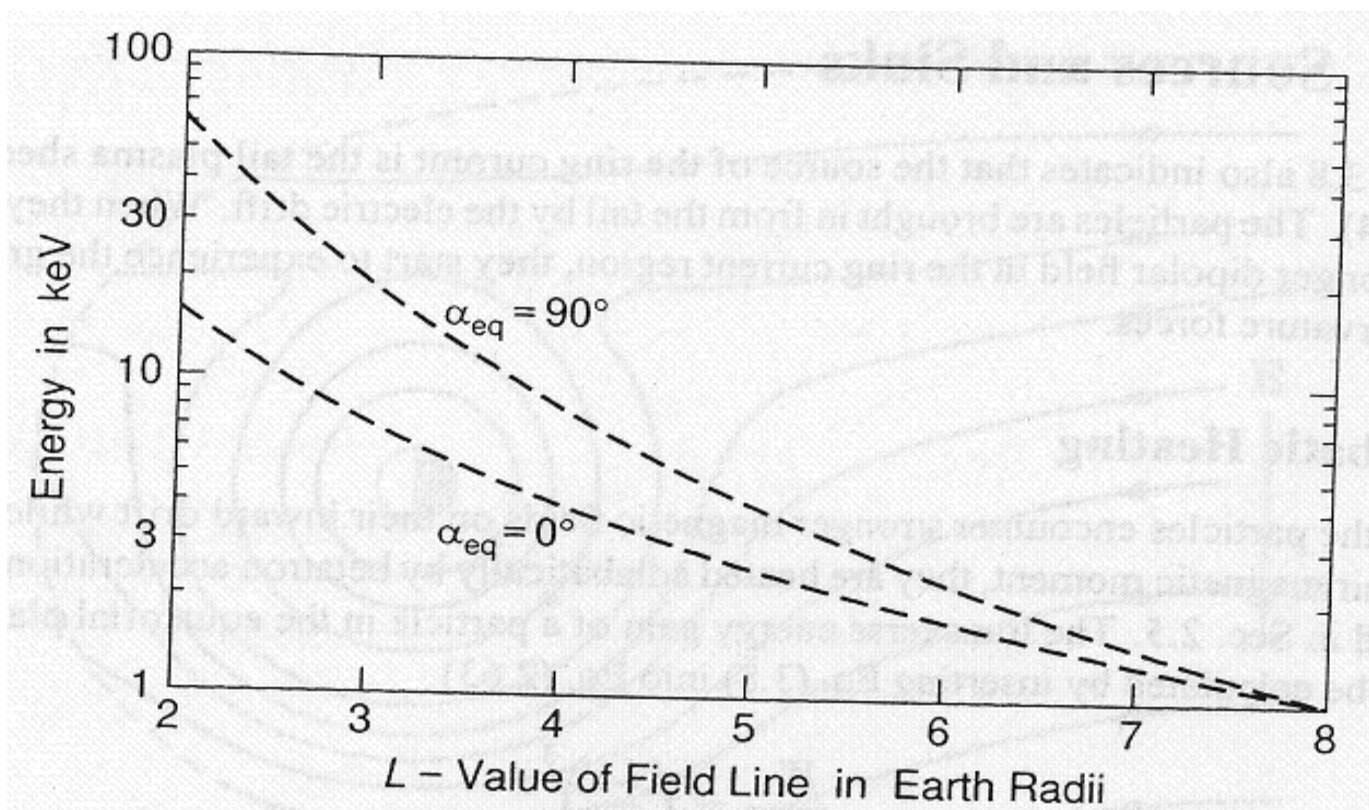
当粒子向内运动时由于磁场线和振荡路径变短, 赤道投掷角小于90度的电子和离子也经历方程(1.66)所描述的Fermi加速, 以便保持它们的纵向不变量常数。计算这种能量增大是很复杂的, 因为计算镜点之间场线的长度也稍有困难, 但近似解为

$$w_{\parallel} / w_{\parallel 0} = [L_0 / L]^{\kappa} \dots\dots\dots(2.24)$$

其中指数范围是在 $\kappa = 2$ (对 $\alpha_{eq} = 0^\circ$ 粒子) 和 $\kappa = 2.5$ (对 $\alpha_{eq} \rightarrow 90^\circ$ 粒子) 之间。因此, 正如图2.9所示, 赤道投掷角 $\alpha_{eq} \approx 0^\circ$ 在 $L_0 = 8$ 处开始的1keV粒子, 在向内漂移约 $2.5 R_E$ 之后能量 $w = w_{\perp}$ 就翻一番了, 在 $L = 2$ 附近能量就达到10keV了。

从1-10keV的等离子体片离子到产生10-100keV的环电流离子是绝热加速的。但在向内漂移时粒子不仅增加能量, 也增大能量

图2-9 不同赤道投掷角的1keV粒子的绝热加热



的各向异性，如方程(1.67)定义的。利用平均值 $\kappa = 2.25$ ，我们得到

$$\frac{A_w}{A_{w0}} = \left(\frac{L_0}{L} \right)^{0.75} \dots\dots\dots(2.25)$$

因此，进一步深入内磁层时，将发现更多大投掷角的高能粒子。

2.4.2. 损失过程

平均说来，粒子从磁尾向内输送必须与内磁层中粒子的损失过程达到平衡。离子从对称环电流损失主要是通过所谓电荷交换 (charge exchange) 过程进行的。中性大气层的最外部分在环电流高度上的密度约为几 100 cm^{-3} 。对于环电流离子和中性原子之间的碰撞来讲，这个密度是太低了(参见导论)。但是，当来自中性大气的冷原子逼近热的环电流离子时通过某个共振效应把它的电子损失给离子。因此，热的环电流离子变为中性粒子或者从磁层逃出，因为它的动能超过引力能量，或者使更低中性大气加热。冷离子对环电流没有任何贡献，但会与等离子体层粒子混合。在电荷交换之前环电流离子的典型寿命为两小时到几天。

其它损失过程是频率远高于振荡频率和回旋频率的电磁变化。在

样的高频波情况下，粒子的第一和第二绝热不变量可能被违反，它的投掷角也被改变而进入损失锥。在更低中性大气层中，投掷角散射或投掷角扩散 (pitch angle scattering or pitch angle diffusion) 会使窄的损失锥 (见图2-5) 变宽而增大粒子损失。环电流电子的损失最有效，因为它们比离子轻很多。在外层环电流中，环电流电子在散射进入损失锥之前的平均寿命只有几小时，而离子在沉降损失之前的寿命有几天。在环电流的内层部分，损失锥更宽，平均沉降寿命更短。

2.5 环电流

利用方程 (2.21) 给定的赤道漂移速度并假定 $\alpha_{eq} = 90^\circ$ ，我们可以计算能量为 w ，密度为 n ，在给定的 L 壳上运转的环电流粒子引起的电流密度

$$j_d = \frac{3L^2nw}{B_E R_E} \dots\dots\dots (2.26)$$

其中 j_d 是向西流动的方位电流.围绕地球漂移的每个环电流粒子贡献很小的环电流.每个粒子产生的磁场可以忽略不计，但是由总电流引起的磁场扰动即使是在地面上也是很显著的。

2.5.1. 磁扰

由所有的环电流粒子在特定的 L 壳上产生的总电流 I_L 与电流密度的关系是 $I_L dl = j_d dV$ 。当对环形单元 dl 和体积元 dV 积分时我们需注意，在特定的径向距离上所有环电流电子和离子的总能量为 $U_L = \int nwdV$ ，且总圆环长简单地 为 $\int dl = 2\pi LR_E$ ，于是

$$I_L = \frac{3U_L L}{2\pi B_E R_E^2} \dots\dots\dots(2.27)$$

根据毕奥-萨伐尔定律(Biot-Savart's law)的积分形式

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_d \times \mathbf{R}}{R^3} dV = \frac{\mu_0 I_L}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R^3}$$

我们可以计算出这种圆形电流环在地球中心位置上引起的磁场扰动

$$\delta B_d = -\frac{\mu_0 I_l}{2LR_E} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3U_L}{B_E R_E^3} \dots\dots\dots(2.28)$$

这里引入了一个负号是考虑了西向环电流产生的扰动磁场与地球偶极磁场的方向相反。由于磁扰动与径向距离无关, 我们可以用总能量 U_R 代替 U_L 并得到所有环电流粒子漂移产生的扰动磁场

$$\Delta B_d = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3U_R}{B_E R_E^3} \dots\dots\dots(2.29)$$

环电流引起的总磁场扰动也必须包括环电流粒子回旋运动引起的抗磁贡献. 再次假定 $\alpha_{eq} = 90^0$ 并用粒子磁矩 μ 代替方程 (2. 1) 中的地球偶极矩 M_E 后, 我们得到轨道在特定 L 壳上的带电粒子在地球中心产生的抗磁磁场

$$\delta B_\mu = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{L^3 R_E^3} \dots\dots\dots(2.30)$$

利用方程 (1. 37) 定义的磁矩和方程 (2. 8) 给定的偶极磁场后得到

$$\delta B_{\mu} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{w}{B_E R_E^3} \dots\dots\dots(2.31)$$

与漂移电流一样,磁扰动与径向距离无关,我们可以用所有环电流粒子的总能量 U_R 代替 w ,并得到所有环电流粒子产生的抗磁场

$$\Delta B_{\mu} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{U_R}{B_E R_E^3} \dots\dots\dots(2.32)$$

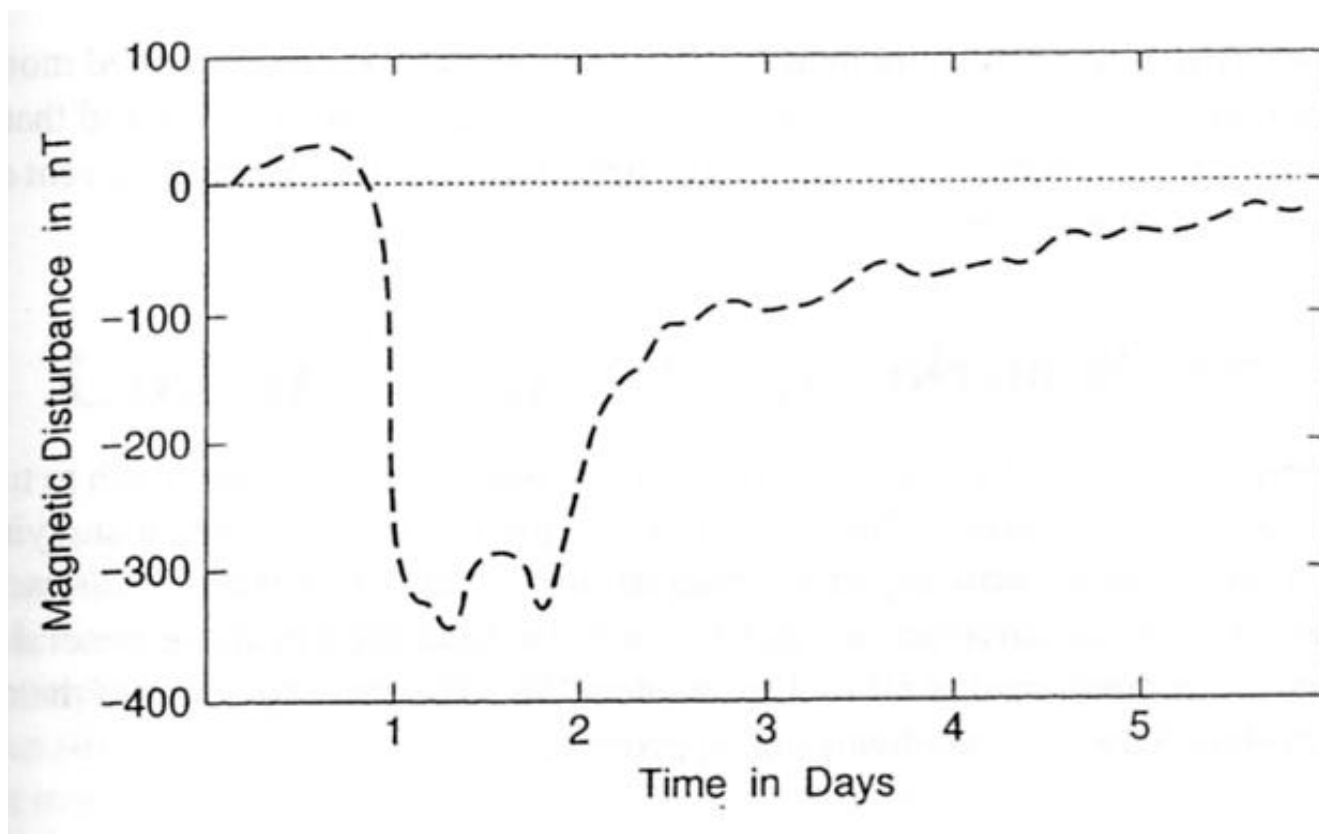
该扰动场与地球偶极场是相加的,因为地球偶极矩与环电流的磁矩是共轴线的。这样在地球中心由环电流引起的总磁场下降为

$$\Delta B_R = \Delta B_d + \Delta B_{\mu} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{U_R}{B_E R_E^3} \dots\dots\dots(2.33)$$

2.5.2. 磁暴

在某些时间有比平常更多的粒子从磁尾注入环电流,主要是增强的昏向电场引起的。环电流总能量增加和地面磁场下降的现象在近赤道磁照图中可以清楚地看到,如图2-10所示。在约一天

图2-10 大磁暴期间磁场的下降



的时间内,赤道地磁场下降了300nT以上,即下降了总磁场的1%以上.地磁场这样强的下降在知道环电流之前很长时间的磁照图中就注意到了,并称为磁暴(magnetic storms)。

磁暴有两个相(或阶段)。在几小时或几天内,增强的电场把越来越多的粒子注入到内磁层,建立起强的暴-时环电流并产生相关的磁扰动场。在一天或两天之后,电场幅度和粒子注入率下降到正常水平。由于电荷交换和投掷角散射使得环电流损失越来越多的暴-时粒子,扰动场开始恢复,如图2-10所示,该恢复相持续几天时间。

方程(2.33)给定的地球偶极场的下降可以用来估计磁暴期间储存在环电流中的增加能量,只要地面赤道附近平均磁场下降来近似 ΔB_R ,这通常是由 D_{st} 指数得到。 D_{st} 指数表示地球赤道上的平均扰动场,它是根据4个低纬地磁观测站的记录资料计算的。由于 D_{st} 指数也受到非环电流的其它来源(感应效应,磁层顶形态变化,等等)的影响,可能对它的值有30%以上的贡献,可以用一半的 D_{st} 值作为下限

$$\Delta U_R \geq \pi \mu_0^{-1} B_E R_E^3 D_{st} \dots\dots\dots (2.34)$$

把数字代入方程(2.34)可求出, 1nT的磁场下降将由环电流能量至少增加 $2 \times 10^{13} J$ 才能引起。假定所有电流集中在 $L = 5$ 并采用方程(2.27)我们求出, 约 $4 \times 10^4 A$ 的环电流产生1nT的磁场下降。在图2-10所示的大磁暴期间, 环电流能量增加 $5 \times 10^{15} J$ 以上, 总电流达到 $10^7 A$ 以上。换句话说我们可以记住, 1eV能量是相当于 $1.6 \times 10^{-19} J$, 在该大磁暴期间, 能量为10keV的 3×10^{30} 个粒子的每一个都注入进了环电流。

2.6 结语

在本章里我们应用了最简单的等离子体物理理论研究了捕获粒子和环电流。当研究粒子的基本行为时单粒子图象是有用的, 但是必须是在粒子相互作用可以忽略的极限情况下。粒子相互作用的集体过程将在以后部分里用更精确的理论进一步描述。

第一部分思考题

(1) 解释下列各等离子体物理术语的物理含义：

回旋频率, 回旋半径, 引导中心, 抗磁效应, 引导中心的电漂移和磁漂移, 绝热不变量, 磁镜, 绝热加热, 能量各向异性

(2) 讨论绝热不变性的条件和违反情况。

(3) 设离子在均匀磁场中运动时有平行速度分量 $v_{\parallel} \neq 0$, 试分别画出 $v_{\parallel} > 0$ 和 $v_{\parallel} < 0$ 两种情况下的运动轨道示意图。

(4) 试证明方程(1. 38)对非磁力也是适用的。

(5) 利用联合的磁场梯度和曲率漂移速度表达式(1. 45), 证明在偶极场赤道上总的磁漂移速度为

$$\mathbf{v}_B = -\frac{3mv^2}{2eBr} \mathbf{e}_{\phi}$$

其中 $\mathbf{e}_{\phi}$ 是赤道上方位方向的单位矢量。

(6) 设在均匀恒定电磁场 ($\mathbf{E} = E\mathbf{e}_y, \mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$) 中, 质量为 m 和电荷为 $q(>0)$ 的粒子, 其初始位置是在坐标原点 ($\mathbf{x}(0)=0$), 初始速度为零 ($\mathbf{v}(0)=0$)。试求粒子的运动速度和轨道, 并绘出其轨道示意图。

(7) 设地磁场可以用偶极矩为 $\mathbf{M} = -M\mathbf{e}_z$ 和磁场分量为

$$B_r = -\frac{\mu_0 M}{2\pi} \frac{\sin \lambda}{r^3}, B_\lambda = \frac{\mu_0 M}{4\pi} \frac{\cos \lambda}{r^3}, B_\phi = 0$$

的偶极场来描述, 其中 $\lambda = (\pi/2 - \theta)$ 表示纬度. 试证明任一点的磁场与赤道磁场 B_{eq} 的比为

$$\frac{B}{B_{eq}} = \frac{(1 + 3\sin^2 \lambda)^{1/2}}{\cos^6 \lambda}.$$

(8) 试求在半径为 a 的圆环上流动的线电流在其所处平面上产生的磁场。

(9) 简述单粒子轨道理论的要点和适用条件。

(10) 单粒子轨道理论在地球偶极磁场中有哪些主要的应用?

第二部分：磁流体动力学

(Magnetohydrodynamics, MHD)

第二部分 磁流体力学（MHD）理论分章目录

第一章 磁流体力学基本理论 -----	71
流体力学的基本概念、单流体方程组、磁流体特征及其描述、磁流体理论的适用条件。	
第二章 等离子体波的磁流体理论 -----	126
磁流体波动的其本概念、磁等离子体的介电张量和色散关系、磁流体力学波、回旋波、混杂波、哨声波等静电和电磁波。	
第三章 磁流体力学激波 -----	189
激波的基本概念和产生条件、一般流体激波、磁流体力学激波、间断面与边界层、应用举例。	
第四章 磁流体力学不稳定性 -----	219
不稳定性概述与分类、不稳定性分析方法、瑞利-泰勒不稳定性、撕裂模不稳定性、开尔文-霍姆霍兹不稳定性、火龙管不稳定性、双流不稳定性。	
补充内容： 磁场重联 -----	255
重联的基本概念和产生条件、稳态重联、非稳态重联、应用举例。	

第一章

磁流体力学基本理论

各小节内容:

- 1.1 等离子体物理学的理论研究方法
- 1.2 流体力学概述
- 1.3 速度场与Helmholtz速度分解定理
- 1.4 应力张量
- 1.5 一般流体的基本方程
- 1.6 运动导电流体内的准静态电磁场方程
- 1.7 磁力、磁应力
- 1.8 磁流体力学方程组
- 1.9 完全电离等离子体的二流体方程，广义欧姆定律
- 1.10 感应方程 磁扩散和冻结
- 1.11*箍缩效应
- 1.12 磁流体力学的适用条件

1.1等离子体物理学的理论研究方法

一、近似处理

- (1) 单粒子轨道理论-----描述粒子的个体行为（总体共性）
- (2) 磁流体力学-----描述粒子的整体行为（连续介质）

二、统计处理

- (3) 动理论-----描述粒子的统计行为（微观分布）

第一部分章节讨论了单粒子轨道理论。这种理论完全忽略带粒子之间的相互作用，只适用于很稀薄的等离子体。实际等离子体是由大量带电粒子组成的动力学系统，粒子之间存在着库伦相互作用。

动理论是用统计物理方法去处理由大量带电粒子构成的等离子体系统微观分布的统计平均。比单粒子轨道理论和磁流体理论处理问题更全面，但数学求解很困难。

研究等离子体的宏观运动时，通常我们可以*近似地*把它当作导电流体来处理。这种模型适用于缓慢变化的等离子体现象。所谓缓慢变化是指等离子体的特征长度和特征时间（在这个长度和时间内等离子体参数产生显著变化）远大于等离子体粒子的平均自由程和平均碰撞时间。在这种情况下，等离子体可以*近似地*看作处于局部热平衡状态，因而可以像通常的流体力学中那样定义流体的速度、压强、密度、温度等流体力学及热力学参量，并用这些宏观参量来描述等离子体的宏观运动。

导电流体中产生的现象的特点是，除了具有一般流体中的重力、压强、粘滞力等作用外，还有电磁力起很大作用。当导电流体在磁场中运动时，流体中将引起感应电场，产生感应电流。这个电流一方面与磁场相互作用，产生附加的机械力，改变流体的运动。另一方面又引起原有磁场的改变。因此，导电流体的运动比通常流体复杂的多。研究导电流体在磁场中运动的规律的科学称为磁流体力学(Magnetohydrodynamics).

磁流体力学是由于天体物理研究的需要从本世纪初开始发展起来的（包括阿耳文(Alfven) 等人的工作），五十年代以来受控热核聚变的研究进一步推动了它的发展。其近代发展是由六、七十年代太阳物理和空间物理有关重联等特殊能量转换形式的认识而达到新的热点。通过实验和空间探测，其特有的一些基本规律以被人们逐步地发现和确立。

磁流体力学不考虑单个粒子的特性只考虑流体元的行为，围绕着流体元和电磁场来建立物质的相互作用关系，这种有关运动、电流、磁场的集体相互作用就决定了磁流体的普遍行为。

本章我们先导出流体力学基本方程。然后，从流体力学基本方程和电磁学基本方程形式上的结合并计入流动与磁场的相互作用，来建立磁流体力学方程。并导出完全电离等离子体的二流体方程和广义欧姆定律。另外从感应方程出发讨论磁场的扩散和冻结效应，以及简要地介绍其它物理效应。最后，讲磁流体力学的适用条件。随后的第二和三章节分别讨论磁流体力学波和激波。第四章和补充内容分别讨论磁流体力学不稳定性和磁场重联。通过把流体力学和电磁学这两门本来是彼此很少关联的独立学科联系在一起，从而能够解释和预示许多新现象，发现许多影响流体运动的方法。

1.2 流体力学概述

流体力学研究流体（气体与液体）的宏观运动与平衡，它以流体宏观模型作为基本假说。

流体宏观模型认为流体是由无数流体元（或称流体微团）连续地组成的（即**连续介质**）。所谓流体元指的是这样的小块流体：它的大小与放置在流体中的实物比较是微不足道的，但比分子的平均自由程却要大的多，它含足够的分子，能实行统计平均求出宏观参量（如速度，密度，压强和温度等）。流体宏观模型的另一个基本特性是**易流性**，即不论作用在流体上的力是如何的小，都会引起其中各流体元彼此间的相对位移，而且取消力的作用后，流体元之间并不恢复其原有的位置。正是流体的这一基本特性使它能与刚体和弹性体区别开来。**刚体**和**弹性体**也是连续介质，但是刚体中质点之间的相互距离不论其上作用的外力如何将保持不变；而在弹性体中，当作用力在数值上达到某一界限时，系统中各点间的相互距离可以改变，但消除了力的作用之后，各点相互关系又恢复原有状态。相反地，流体能够有任意大的**变形**。

流体与外部和流体元之间的相互作用

流体对于外界从各个方向施于其上的**压缩**，都给予显著的**抵抗**，但是对于流体元之间的**滑动**，抵抗的就比较弱，并且对滑动的抵抗力（也即**切应力**）随着互相滑动的相对速度一起消失，即不存在与相邻流体元之间的相对速度无关的固定不变的静摩擦力，因此，很小的力就能破坏流体元相对静止的状态。流体中内力的这种性质同刚体和弹性体不同：在刚体中，由外力作用所引起的的内力完全不能使刚体各点的相互分布发生改变；在弹性体中内力可以以拉力，也可以以压力、切应力方式出现。

形变特性

内力特性

研究流体运动的两个基本方法

第一个方法是和普通描写运动相似的方法，通常称为**拉格朗日方法**。特点是跟踪单个流体元的行为。

另一个是得到更广泛应用的**欧勒方法**。特点是监视整个流场的分布（空间变化）和演化（时间变化）

拉格朗日方法是基于研究个别流体元的运动。如果以 ξ 表征个别流体元，则对于任意时刻 t ，位置矢量 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t; \xi)$ 。特别是用流体元在某“起始”时刻 $t=t_0$ 的坐标 (a, b, c) 来表征个别流体元的时候， $\xi = (a, b, c)$ ，我们的矢量描述方程为：

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, a, b, c) \quad [1.2.1]$$

$$\left. \begin{aligned} \text{分量为: } x &= x(t, a, b, c) \\ y &= y(t, a, b, c) \\ z &= z(t, a, b, c) \end{aligned} \right\} \quad [1.2.2]$$

给定 (a, b, c) ，通过上述方程组可确定流体元的运动规律。
给定 t ，通过上述方程组可确定一定时间流体元的空间分布。

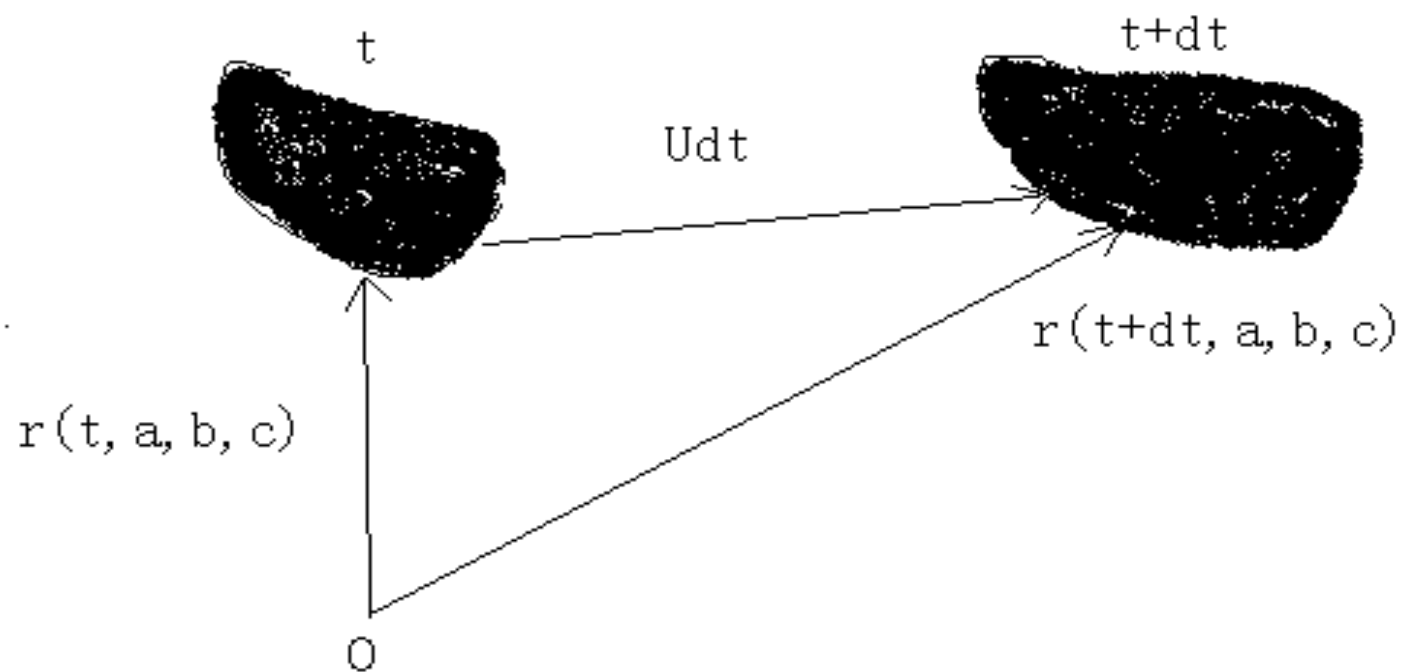


图1.2.1 对流体元行为的描述

为了得到确定流体元的速度 $\mathbf{u}$ ，只要将上述方程组对时间 t 微分而把起始坐标 a, b, c 当作常数就可以了。

$$\mathbf{u} = \partial \mathbf{r} / \partial t = \partial \mathbf{r}(t, a, b, c) / \partial t \quad [1.2.1a]$$

分量为

$$\begin{aligned} u_x &= \partial x / \partial t = \partial x(t, a, b, c) / \partial t \\ u_y &= \partial y / \partial t = \partial y(t, a, b, c) / \partial t \\ u_z &= \partial z / \partial t = \partial z(t, a, b, c) / \partial t \end{aligned} \quad [1.2.2a]$$

同样可以得到流体元的加速度。

$$[1.2.1b]$$

$$\dot{u} = \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 r(t; a, d, c,)}{\partial t^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_x &= \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x(t; a, b, c,)}{\partial t^2} \\ \dot{u}_y &= \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y(t; a, b, c,)}{\partial t^2} \\ \dot{u}_z &= \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z(t; a, b, c,)}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad [1.2.2b]$$

在方程[1.2.2a]和[1.2.2b]中，如给a, b, c以不同的值而令t不变，则得到在确定时刻流体元的速度和加速度的分布。特别是，当t=t₀，而a, b, c可以改变，则得到流体元的起始速度和加速度分布。

分布是对空间而言，**演化**是对时间而言。

欧勒方法不直接考虑个别流体元如何运动，而是用场的观点研究流体运动。它只集中注意力于那些发生在空间给定点的流动情况；对于流体元从什么地方和如何在给定时刻达到这一点，经过这一点以后又会运行到别的什么地方和怎样运行到那些地方的，这一切问题从欧勒方法观点看来并不是基本的。这样，欧勒方法是把空间某一固定点 (x,y,z) 的流体元的速度当作时间的函数来研究的；显然，这个速度也是坐标 (x,y,z) 的函数。因此，矢量描述方程为：

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}(t, x, y, z) \quad [1.2.3]$$

如果在上面的矢量描述方程中把 t 当作可变的，而 x,y,z 当作常数，则对不同的 t 我们得到不同时刻经过空间中确定点的不同流体元的速度；而如把 t 当作常数， x,y,z 当作变数，则可得到对于确定时刻空间中流体元的速度分布。

当过渡到推演流体元的加速度时，我们要从两个不同观点来考虑这个问题。

第一点，考虑当不同流体元经过空间中给定点时，该点的速度怎样随时间变化？那么为了回答这个问题，只要在上面的矢量描述方程对时间微分并设 x, y, z 为常数就可以了。这是得到偏微分：

$$\delta \mathbf{u} / \delta t, \text{ 或分量 } \delta u_x / \delta t; \quad \delta u_y / \delta t; \quad \delta u_z / \delta t, \quad [1.2.4]$$

称为局部微商（或当地微商）。

第二点考虑在给定时刻经过空间中 (x,y,z) 点的流体元的加速度问题。在此情形，坐标 x,y,z 就应视为可变的，因为在无限小的时间间隔 dt 中，所考虑的流体元正在从 (x,y,z) 点进入到新位置。由于运动点本身的坐标 x,y,z 是时间 t 的函数，因此矢量描述方程[1.2.3]对时间 t 微分便得到流体元加速度的下列表示：

$$d\mathbf{u}/dt = \delta\mathbf{u}/\delta t + (\delta\mathbf{u}/\delta x) \delta x/\delta t + (\delta\mathbf{u}/\delta y) \delta y/\delta t + (\delta\mathbf{u}/\delta z) \delta z/\delta t$$

$$= \delta\mathbf{u}/\delta t + (\delta\mathbf{u}/\delta x) \mathbf{u}_x + (\delta\mathbf{u}/\delta y) \mathbf{u}_y + (\delta\mathbf{u}/\delta z) \mathbf{u}_z$$

$$= \delta\mathbf{u}/\delta t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad [1.2.5]$$

迁移微商（或随流微商）

全微商 = 当地微商 + 迁移微商（随流微商）

微商 $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ 是沿着介质（物质）的个别微团的轨道计算的，因此称为**物质的或个体的微商**。从解析方面看，它就是 $\mathbf{u}(t; x, y, z)$ 对时间 t 的**全微商**。 $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ 是速度对时间的**迁移微商**或**随流微商**，它给出流体元速度由于该流体元在空间位移而产生的变化。这样，在给定时刻经过空间中指定点的流体元的加速度，是由在该点的速度矢量的改变（局部改变）与流体元运行时的速度矢量的改变（迁移的改变）之和来决定的。速度矢量的这种微分方法，可以称为**随着流体元运动的微分**。

对于任意一个场函数 $\Phi = \Phi(t, x, y, z,)$ ，无论是量标 φ ，矢量 $\mathbf{a}$ 或张量 $\mathbf{T}$ 。对时间的全微分都可表示为

$$d\Phi/dt = \delta\Phi/\delta t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Phi \quad [1.2.6]$$

= 场的非定常性局部改变 + 从一点到另一点的迁移改变。

量标 φ ，矢量 $\mathbf{a}$ 或张量 $\mathbf{T}$ 对时间的全微分可表示如下：

$$\left. \begin{aligned} d\varphi/dt &= \delta\varphi/\delta t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\varphi \\ d\mathbf{a}/dt &= \delta\mathbf{a}/\delta t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{a} \\ d\mathbf{T}/dt &= \delta\mathbf{T}/\delta t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{T} \end{aligned} \right\} \quad [1.2.7]$$

流线

流线这个概念在对流体运动状态的描述中是非常有用的。**流线定义为当时间给定时，其切线方向处处与流体的速度矢量 $\mathbf{u}$ 平行的描述线**。要注意的是流体粒子的运动轨迹并不一定要和流线重合。流线是在时间给定时，在全空间各处其切线方向与流体的速度矢量 $\mathbf{u}$ 平行。而流体粒子的运动轨迹是在所有时刻，给定粒子的轨迹切线与给定粒子的速度矢量平行。也就是说，一个是给定时间在空间上的连线，一个是给定流体元在不同时间对应的空间点上的连线。

令 $d\mathbf{l}$ 为流线上的矢量微元，流体速度为矢量 $\mathbf{u}$ ，根据上面定义我们得到

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{u} = 0 \quad [1.2.8]$$

再令 u_x ， u_y ， u_z 为直角坐标系统速度矢量的分量，将上方程分解为标量方程则得到

$$dx/u_x = dy/u_y = dz/u_z \quad [1.2.9]$$

这个微分方程组就可以描述流体的流线。在稳态时（流场也不随时间变化），流线是固定的，流体微元的运动轨迹也是固定的。这意味着在稳态，流线上的粒子始终保持在同一条流线上，不同

流线上的粒子相互并不接触，所以在稳态时没有混合。但当
在非稳态时，即流场随时间发生变化时，会产生“混合”。

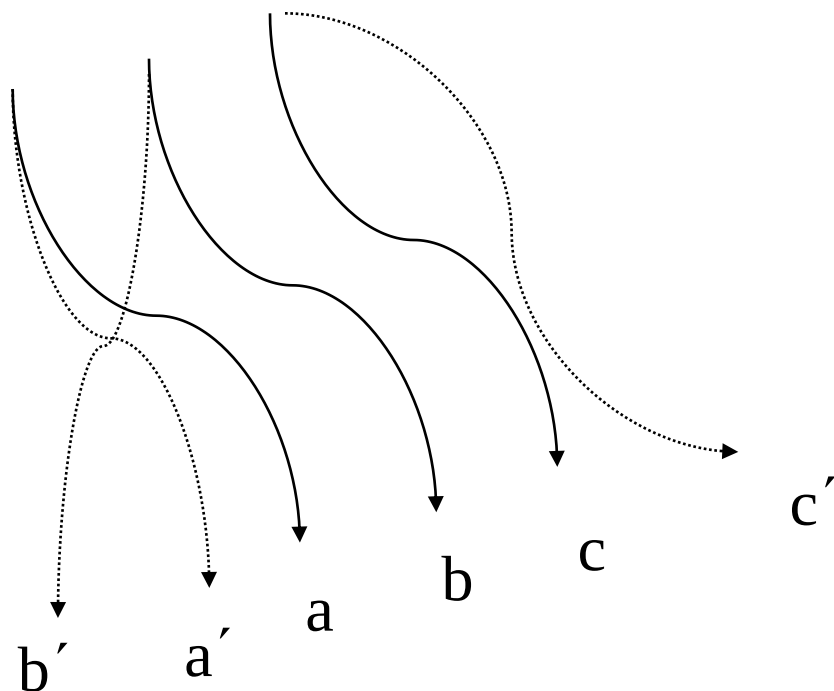


图1.2.2 流线示意图

1.3 速度场与Helmholtz速度分解定理

现在研究运动流体的速度场。我们利用数学分析的通常方法泰勒级数展开来研究在指定瞬间空间某点 o 邻域中的速度场。设用下标 0 表示在 $o(x, y, z)$ 点所决定的量。试考虑 o 点及其邻域的一点 $P(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ 。设时刻 t 在这两点的速度分别是 u_0 和 u 。将 u 在 o 点做泰勒展开并略去二阶以上的小量可得：

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + (\partial \mathbf{u} / \partial x)_0 \delta x + (\partial \mathbf{u} / \partial y)_0 \delta y + (\partial \mathbf{u} / \partial z)_0 \delta z + \dots \quad [1.3.1]$$

由于 $\delta x, \delta y, \delta z$ 是小量，在本节内以下用 $\mathbf{r}=(x,y,z)$ 来代替 $(\delta x, \delta y, \delta z)$

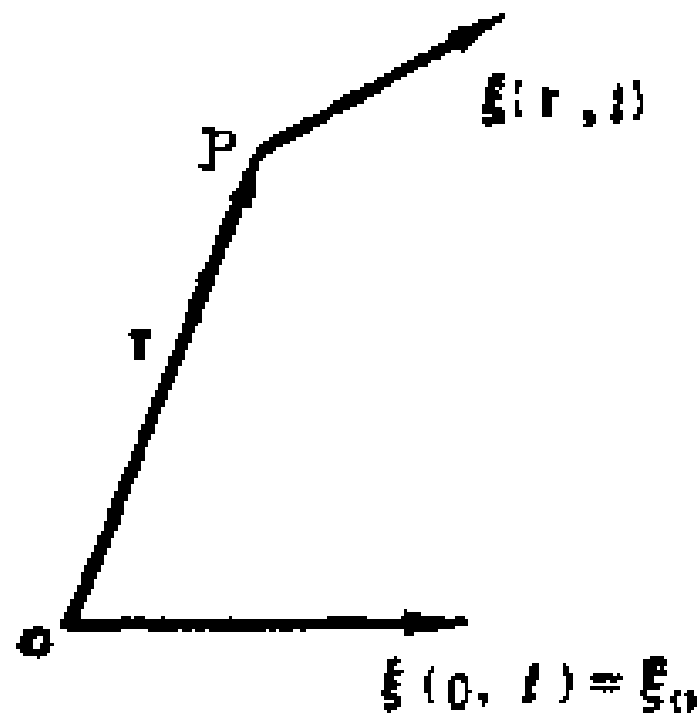


图1.3.1

式[1.3.1]也可以写成

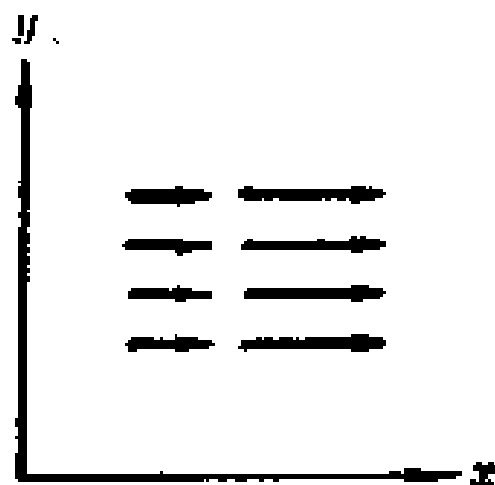
$$\begin{aligned} u = u_0 + & a_{11}x \mathbf{e}_x + a_{12}y\mathbf{e}_x + a_{13}z \mathbf{e}_x \\ & a_{21}x \mathbf{e}_y + a_{22}y\mathbf{e}_y + a_{23}z \mathbf{e}_y \\ & a_{31}x \mathbf{e}_z + a_{32}y\mathbf{e}_z + a_{33}z \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad [1.3.2]$$

这里

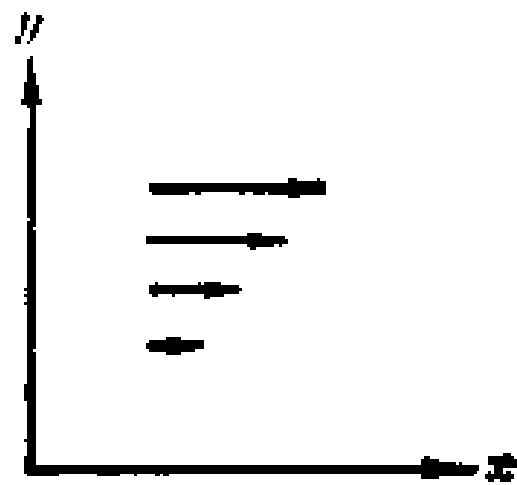
$$a_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j)_0 \quad i, j = 1, 2, 3. \quad [1.3.3]$$

其中 u_i 和 x_j ($i, j = 1, 2, 3$) 为 u 和 r 的分量, $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ 为 x, y, z 轴方向的单位矢量。

由[1.3.2]式可见, o 点邻域的流体元 P 除了以速度 u 随 o 点一起移动的平移运动外, 还同时进行九种运动。例如 $a_{11}x \mathbf{e}_x$ 表示沿 x 轴方向、速度与坐标 x 成比例的运动, 也即沿 x 轴方向均匀伸长 ($a_{11} > 0$) 或缩小 ($a_{11} < 0$) 的运动 (图1.3.2a); $a_{12}y\mathbf{e}_x$ 表示沿 x 轴方向、速度与坐标 y 成比例的运动, 也即不同 y 位置沿 x 方向滑动的运动 (图1.3.2b)。



(a) $a_{11}x \mathbf{e}_x (a_{11} > 0)$



(b) $a_{12}y \mathbf{e}_x (a_{12} > 0)$

图1.3.2 $a_{11}x \mathbf{e}_x$ 和 $a_{12}y \mathbf{e}_x$ 。

现在把 $a_{21}x \mathbf{e}_y + a_{12}y\mathbf{e}_x$ 写成

$$a_{21}x \mathbf{e}_y + a_{12}y\mathbf{e}_x = \Omega_z (x \mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_x) + 1/2\gamma_{xy} (x \mathbf{e}_y + y\mathbf{e}_x) \quad [1.3.4]$$

其中

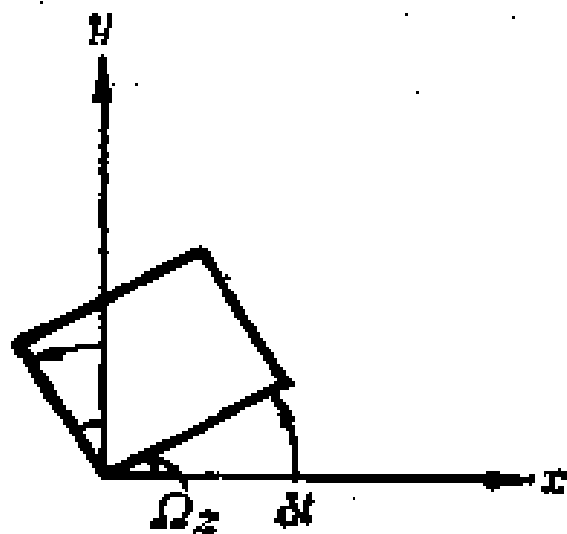
$$\Omega_z = (a_{21} - a_{12})/2, \quad \gamma_{xy} = (a_{21} + a_{12}) \quad [1.3.5]$$

[1.3.5]式中 $\Omega_z (x \mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_x)$ 表示以角速度 Ω 围绕z轴像刚体一样转动的转动运动（图1.3.3a）； $1/2\gamma_{xy} (a_{21}x \mathbf{e}_y + a_{12}y\mathbf{e}_x)$ 表示与x轴和y轴所成的角度在单位时间内减少的运动，即纯剪切运动

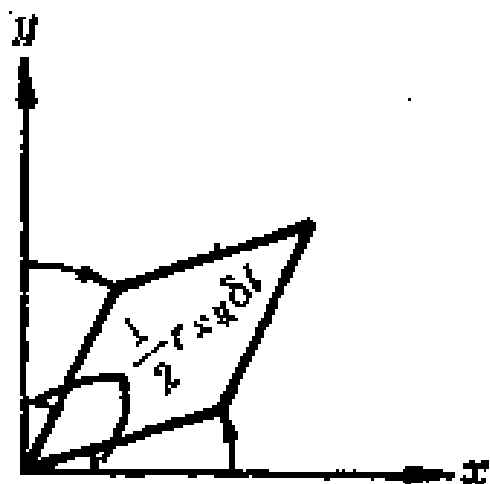
（图 1.3.3b）。同样，把 $a_{13}z \mathbf{e}_x$ 和 $a_{31}x \mathbf{e}_z$ ， $a_{23}z \mathbf{e}_y$ 和 $a_{32}y\mathbf{e}_z$ 组合起来，得到

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & \mathbf{u}_0 + \Omega_x (y \mathbf{e}_z - z\mathbf{e}_y) + (1/2)\gamma_{yz} (y\mathbf{e}_z + z\mathbf{e}_y) + (1/2)\gamma_{xx} x\mathbf{e}_x \\ & + \Omega_y (z \mathbf{e}_x - x\mathbf{e}_z) + (1/2)\gamma_{zx} (z\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_z) + (1/2)\gamma_{yy} y\mathbf{e}_y \\ & + \Omega_z (x \mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_x) + (1/2)\gamma_{xy} (x\mathbf{e}_y + y\mathbf{e}_x) + (1/2)\gamma_{zz} z\mathbf{e}_z \end{aligned} \quad [1.3.6]$$

其中



(a) 转动运动



(b) 剪切运动

图1.3.3 转动和剪切运动

$$\left. \begin{aligned}
 \Omega_x &= (1/2) (\partial u_z / \partial y - \partial u_y / \partial z) \\
 \Omega_y &= (1/2) (\partial u_x / \partial z - \partial u_z / \partial x) \\
 \Omega_z &= (1/2) (\partial u_y / \partial x - \partial u_x / \partial y) \\
 \gamma_{yz} &= \partial u_z / \partial y + \partial u_y / \partial z \\
 \gamma_{zx} &= \partial u_x / \partial z + \partial u_z / \partial x \\
 \gamma_{xy} &= \partial u_y / \partial x + \partial u_x / \partial y \\
 \gamma_{xx} &= 2 \partial u_x / \partial x \\
 \gamma_{yy} &= 2 \partial u_y / \partial y \\
 \gamma_{zz} &= 2 \partial u_z / \partial z
 \end{aligned} \right\} [1.3.7]$$

由此可见，给定点 o (极限)邻域中流体运动可以分为4部分；
 (i) 以速度 u 随着极点一起运动的**准刚体平移运动**； (ii)
 以角速度 Ω (Ω_x , Ω_y , Ω_z) 围绕极点转动的准刚体转动运动；
 (ii) 纯剪切运动和 (iv) x, y, z 轴方向的伸长运动。

准刚体平移运动 (i) 和转动运动 (ii) 同流体运动的动量和角动量直接相关。容易看出投影为

$$\omega_x = 2\Omega_x = (\partial u_z / \partial y - \partial u_y / \partial z)$$

$$\omega_y = 2\Omega_y = (\partial u_x / \partial z - \partial u_z / \partial x)$$

$$\omega_z = 2\Omega_z = (\partial u_y / \partial x - \partial u_x / \partial y)$$

的矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 等于 $\mathbf{u}$ 的旋度

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}, \quad [1.3.8]$$

我们称它为流体的准刚体运动速度场的**涡旋矢量**。由[1.3.6]式可见，流体的涡旋运动角速度为涡旋矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的一半。由[1.3.6]和[1.3.8]式，流体的准刚体运动速度可以写成

$$\mathbf{v}_{\text{准刚}} = \mathbf{u}_0 + 1/2(\nabla \times \mathbf{u})_0 \times \mathbf{r} \quad [1.3.9]$$

式中 $(\nabla \times \mathbf{u})_0$ 应理解为 $\nabla \times \mathbf{u}$ 在 $\mathbf{o}$ 点的值。

流体的纯剪切运动（iii）和伸长运动（iv）是和准刚体运动有区别的变形运动，它在粘性流体中起重要作用。由方程[1.3.6]式和方程[1.3.9]式，变形运动部分可以写成

$$\mathbf{u}_{\text{变形}} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{r} \quad [1.3.10]$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{ij} = (1/2) (\partial u / \partial x_i + \partial u / \partial x_j) \quad i, j = 1, 2, 3.$$

$$S = \begin{pmatrix} \partial u_x / \partial x & (1/2) (\partial u_y / \partial x + \partial u_x / \partial y) & 1/2 (\partial u_x / \partial z + \partial u_z / \partial x) \\ (1/2) (\partial u_y / \partial x + \partial u_x / \partial y) & \partial u_y / \partial y & (1/2) (\partial u_z / \partial y + \partial u_y / \partial z) \\ (1/2) (\partial u_z / \partial x + \partial u_x / \partial z) & (1/2) (\partial u_z / \partial y + \partial u_y / \partial z) & \partial u_z / \partial z \end{pmatrix}$$

[1.3.11]

称为**变形率张量**, 具有对称性, 其中对角量分别为o点沿x, y, z轴方向的相对伸长率, 其余部分为剪切率。

于是，给定点 o 邻域流体运动的速度场可以写成

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + 1/2(\nabla \times \mathbf{u})_0 \times \mathbf{r} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{r} \quad [1.3.12]$$

=(准刚体平移运动+准刚体转动运动+流体变形运动)

由上分析可以看出流体的运动形式是由多特性运动所组成。

荷姆霍兹(Helmholtz)速度分解定理

流体微团的运动可以分解三部分。

- (1) 平动运动;
- (2) 转动运动;
- (3) 变形运动。

更进一步，变形运动又可以分解为

- (1) 沿 x , y , z 轴方向的伸长运动
- (2) 纯剪切运动。

1.4 应力张量

作用于流体质点的力，可以分为两类：1) **质量力**[或澈体力]； 2) **表面力**。质量力是作用在流体所有质点的力，如重力，电磁力和惯性力；表面力是指作用在所分出的流体侧面上的力，如流体压力，内摩擦力。作用在单位侧面积上的表面力称为应力。

为了考察流体中某点M附近应力的情况，我们可以通过M点取一小面元 $d\sigma$ （图1.4.1），而后求 $d\sigma$ 前方的流体通过此面元对后方流体作用力有多大。用 $d\mathbf{f}$ 表示这个作用力，则 $\mathbf{p}=d\mathbf{f}/d\sigma$ 就代表作用在单位面积上的表面力，即应力。应力 $\mathbf{p}$ 在法线 $\mathbf{n}$ 上的投影 P 。叫做**法应力**，而应力 $\mathbf{p}$ 在过同一点的切面上的投影 $\mathbf{p}_t$ 叫做**切应力**。由于流体中可存在切应力，故 $\mathbf{p}$ 的方向一般不与 $d\sigma$ 相同，当 $d\sigma$ 的方向改变时， $\mathbf{p}$ 的大小和方向也随之改变。

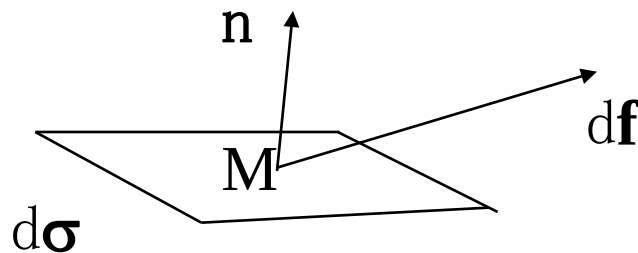


图1.4.1

由此可见质量力和表面力的基本差异是：质量力分布密度是空间点和时间的单值函数，也即它形成一个矢量场，而应力则在空间每一点随受力取向的不同而有无穷多个值。我们可以说应力是两个矢量的函数：即空间点的位置矢量 $\mathbf{r}$ 和该点处小面元的法线单位矢量 $\mathbf{n}$ 的函数。

如果我们对于“通过M点、任意方向的小面元 $d\sigma$ ”所相应的应力都清楚了，那么可以认为我们对这一点应力情况就完全清楚了。下面我们来证明，应力可以表示成小面元的单位法线矢量与某个张量的乘积。这个张量是空间点的位置的单值函数，也就是说，它将与小面元的方向无关，而同时却可以用来确定应力 $\mathbf{p}$ 。

考虑在流体中割出的、侧面平行于坐标面的一小四面体MABC(图1.4.2)。设其斜面为 $d\sigma_n$ 另三个面分别为 $d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\sigma_z$ ($d\sigma_n$ 的方向取得自内向外, 其他三个面的方向分别沿三个轴), 则这三个面积的大小各为

$$d\sigma_x = d\sigma_n \cdot \mathbf{e}_x, \quad d\sigma_y = d\sigma_n \cdot \mathbf{e}_y, \quad d\sigma_z = d\sigma_n \cdot \mathbf{e}_z$$

令 $\mathbf{p}_n$, $\mathbf{p}_x$, $\mathbf{p}_y$, $\mathbf{p}_z$ 表示相应于上述四个小面元的应力, 则作用在这些小面元上的表面力就等于。

$$\mathbf{p}_n d\sigma_n, \quad \mathbf{p}_x d\sigma_x, \quad \mathbf{p}_y d\sigma_y, \quad \mathbf{p}_z d\sigma_z。$$

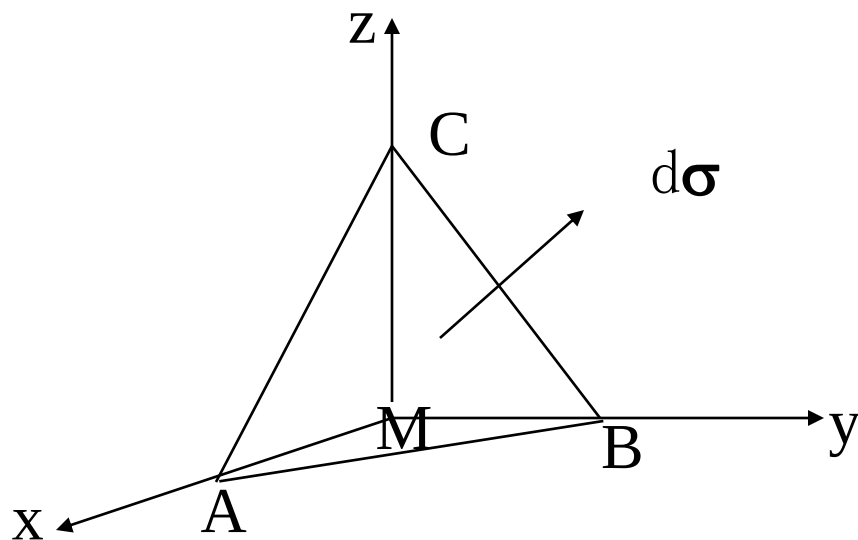


图1.4.2

因为直接作用在处于四面体MABC内的流体上的质量力等于 $F\rho d\tau$ （这里F是单位质量流体所受质量力， ρ 是流体密度， $d\tau$ 为四面体的流体体积），而作用于同一流体质量上的惯性力等于 $\mathbf{a}_e\rho d\tau$ （这里 $\mathbf{a}_e$ 是四面体重心的加速度矢量），因此根据达朗贝尔原理（理论力学中关于多质点力学体系所有力形成平衡的原理）就有

$$F\rho d\tau - \mathbf{a}_e\rho d\tau + P_n d\sigma_n - p_x d\sigma_x - p_y d\sigma_y - p_z d\sigma_z = 0 \quad [1.4.1]$$

这里具有应力 p_x, p_y, p_z 的项取负号是因为小面元 $d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_z$ 上从体积 $d\tau$ 向外的法线方向与相应的坐标轴正方向相反。

在上方程中包含体积元的第一项和第二项是三阶无穷小，它和其它与面积元成比例的各项比较起来可以舍去；于是我们得到。

$$\begin{aligned} p_n d\sigma_n &= p_x d\sigma_x + p_y d\sigma_y + p_z d\sigma_z \\ &= p_x d\sigma_n \cdot \mathbf{e}_x + p_y d\sigma_n \cdot \mathbf{e}_y + p_z d\sigma_n \cdot \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$\text{即 } p_n = \alpha p_x + \beta p_y + \gamma p_z \quad [1.4.2]$$

这里 α, β, γ 是小面元 $d\sigma_n$ 法线的方向余弦。

在坐标轴上的投影是

$$\left. \begin{aligned} p_{nx} &= \alpha p_{xx} + \beta p_{yx} + \gamma p_{zx} \\ p_{ny} &= \alpha p_{xy} + \beta p_{yy} + \gamma p_{zy} \\ p_{nz} &= \alpha p_{xz} + \beta p_{yz} + \gamma p_{zz} \end{aligned} \right\} \quad [1.4.3]$$

这里 p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} 是法应力。而 p_{xy} , p_{xz} , p_{yx} , p_{yz} , p_{zx} , 和 p_{zy} 是切应力。由此可见, 如果(p_{xx} , p_{xy} p_{xz})等九个量为已知, 则对任意方向 $d\sigma_n$ 。所相应的应力都可以求出。这样, M点的应力情况就完全清楚了。

九个应力集合, 构成一个二阶张量, 称为**应力张量**, 我们用大写字母**P**来表示它:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{yx} & p_{zx} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{zy} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{pmatrix} \quad [1.4.4]$$

(作用在任意以 $\mathbf{n}$ 为单位法矢量的斜面元上的应力, 可以用单位矢量和应力张量的乘积表示, 或综合起来写成:

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \quad [1.4.5]$$

现在研究应力张量和流体运动的变形率张量之间的关系。实验证明，两层流体之间的摩擦切应力，与平行于界面的速度分量沿界面法线方向的导数成正比。例如，假设流体沿ox轴平行于xoy平面做平面运动，则切应力

$$P_{xz} = \eta du_x/dz \quad [1.4.6]$$

其中 η 称为**粘滞系数**，它只取决于流体的物理性质和温度，而与运动的性质无关。这就是所谓**牛顿切应力法则**。

我们把牛顿法则推广到流体的任意运动情形。假设运动流体中的应力张量是变形率张量的线性函数。另外假设运动流体是各向同性的，也即流体的物理性质不与任何特定的方向有关。这时，应力张量 $\mathbf{P}$ 和变形率张量 $\mathbf{S}$ 之间的系数应是标量，而所要求的关系可以写成

$$\mathbf{P} = a\mathbf{S} + b\mathbf{I} \quad [1.4.7]$$

式中 a 和 b 均为标量； $\mathbf{I}$ 为单位张量，它在任何正交坐标系中保持球对称的性质，并和流体各向同性一致。

根据上关系式为线性的条件，标量 a 不可能与张量 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{S}$ 的诸分量有关，所以它是与流体的运动形状无关的物理常数。考虑到[1.4.6]形式我们令系数为 $a=2\eta$ 。

标量 b ，只有用张量 $\mathbf{P}$ 及 $\mathbf{S}$ 诸分量的标量线性组成，才能与这些张量的诸分量有线性的联系。同时由于 b 是标量，它对坐标轴的任何转动来说都应该是不变量。因此，在标量 b 的式中，只能引述张量 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{S}$ 的这样的诸分量的线性组合，以使当坐标轴转动时其值也是不变的。对于二阶张量来说，唯一的这种类型的线性组合是张量的线性不变量，等于主对角线上的诸分量之和。应力张量 $\mathbf{P}$ 的线性不变量是

$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}$
 而变形率张量的线性不变量是
 $S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} = \partial u_x / \partial x + \partial u_y / \partial y + \partial u_z / \partial z = \nabla \cdot \mathbf{u}$ 。

(练习作业：)

利用线性形不变量 $p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}$ 和 $S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} = \nabla \cdot \mathbf{u}$ ，令

$$a = 2\eta, \quad b = b_1(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) + b_2(\nabla \cdot \mathbf{u}) + b_3。$$

在关系式 $\mathbf{P} = a\mathbf{S} + b\mathbf{I}$ 中证明 $b_1 = 1/3$, $b_2 = -(2/3)\eta$, $b_3 = 0$

提示：取等式[1.4.7]左边和右边三个对角线分量之和，假定所讨论的流体处于静止状态，而法向应力之和等于 $-3P_0$ 。其中 P_0 为流体的静压力。因为静压力的大小是任意的， $\nabla \cdot \mathbf{u}$ 也是任意的)

所以，应力张量和变形率张量之间线性关系的一般形式是

$$\mathbf{P} = 2\eta \mathbf{S} - \left[-\left(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} \right) / 3 + (2/3) \eta \nabla \cdot \mathbf{u} \right] \mathbf{I} \quad [1.4.8]$$

假定三个法向应力的算术平均值等于给定点处的压力和体积膨胀率 $\nabla \cdot \mathbf{u}$ 成比例的量之和：

$$\left(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} \right) / 3 = -p + \zeta \nabla \cdot \mathbf{u} \quad [1.4.9]$$

这里系数 ζ 称为流体的**第二粘滞系数**（或**体积粘滞系数**）。

于是，应力张量 $\mathbf{P}$ 最后可以写成如下常用形式：

$$\mathbf{P} = 2\eta \mathbf{S} - [p + (2/3) \eta \nabla \cdot \mathbf{u} - \zeta \nabla \cdot \mathbf{u}] \mathbf{I} \quad [1.4.10]$$

将 $\mathbf{S}$ 的表达式[1.3.11]带入上式就可得到 $\mathbf{P}$ 的分量形式为：

$$P_{ij} = -p \delta_{ij} + \chi_{ij}$$

$$\chi_{ij} = \eta \left[\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i - (2/3) \partial u_m / \partial x_m \delta_{ij} \right] + \zeta \partial u_m / \partial x_m \delta_{ij} \quad [1.4.11]$$

这里 m 为对应 x, y, z 等方向的3个分项之和。

χ_{ij} 称为粘滞应力张量。

1.5 一般流体的基本方程

现在我们来建立流体力学的基本方程——连续方程，运动方程和能量方程。它们是把经典力学的普遍规律——质量守恒，动量守恒和能量守恒定律具体应用到流体运动过程而得到的。

(1) 连续方程

体积为 τ 的流体的总质量是 $\int_{\tau} \rho d\tau$ 。从这个体积流出来的质量流是 $\int_{\Sigma} \rho \mathbf{u} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ ，这里 ρ 为流体密度， Σ 为体积的封闭曲面。根据质量守恒定律， τ 中流体质量的变化率恒等于通过 Σ 流出来的质量流，即

$$\partial \int_{\tau} \rho d\tau / \partial t = - \int_{\Sigma} \rho \mathbf{u} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = - \int_{\tau} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) d\tau$$

由于体积的任意性，立即得到：

$$\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad [1.5.1]$$

$$\text{或 } d\rho/dt + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad [1.5.2]$$

上式称为**连续方程**。在定常流动情形（ $\partial\rho/\partial t = 0$ ），连续方程）成为

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad [1.5.3]$$

对于**不可压缩流体**，连续方程成为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad [1.5.4]$$

(2) 运动方程

在体积为 τ 的流体上作用的总力 $\int_{\tau} \rho (d\mathbf{u}/dt) d\tau$ 是，根据动量守恒定律，它应等于外来质量力 $\int_{\tau} \rho \mathbf{g} d\tau$ 与表面力 $\int_{\Sigma} p_n d\sigma$ 之和，即

$$\int_{\tau} \rho (d\mathbf{u}/dt) d\tau = \int_{\tau} \rho \mathbf{g} d\tau + \int_{\Sigma} p_n d\sigma = \int_{\tau} \rho \mathbf{g} d\tau + \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{P} d\tau \quad (\text{利用了奥高公式})$$

由于 τ 的任意性，我们得到：

$$\rho d\mathbf{u}/dt = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \mathbf{P} \quad [1.5.5]$$

这即**运动方程**。将应力张量表达式[1.4.11]带入[1.5.5]*，得到

$$\rho d\mathbf{u}/dt = -\nabla p + (\zeta + \eta/3) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \eta \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \quad [1.5.6]$$

这个方程通常称为**纳维尔-斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程**。

*作业

为了表示粘滞性对流体运动的影响程度，通常采用雷诺数R。它是以[1.5.6]左边式 $\rho \frac{du}{dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u \cdot \nabla)u = 0$ 中的 $\rho(u \cdot \nabla)u$ 项与右边第三项 $\eta \Delta u$ 的大小之比来定义的。设流动的特征长度为L，特征速度为U，并以 $\nu = \eta / \rho$ 表示粘滞率，

$$R = UL^{-1} U / (\nu L^{-2} U) = LU / \nu \quad [1.5.7]$$

则它可看作是表示惯性项/粘滞项（或非线性项/耗散项）的大致标准，R小时，说明粘滞性的效应较大。

(3) 能量方程

把普遍的能量守恒应用到某一块单独运动着的流体时，这条定律可以叙述如下：某体积的流体中，在一无限小的时间间隔内引起的总能量的增加，等于作用在该体积及其表面上的外加质量力和表面力所作的元功加上该时间间隔内从外界传到该体积的元热量。于是，对于具有面积 Σ 的运动流体体积 τ 内，能量平衡方程可以写成如下积分形式：

$$d \left(\int_{\tau} \rho (\varepsilon + \mathbf{u}^2/2) d\tau \right) / dt = \int_{\tau} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} d\tau + \int_{\Sigma} \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{u} d\sigma - \int_{\Sigma} \mathbf{q} \cdot d\sigma \quad [1.5.8]$$

上式左边是体积 τ 中的流体内能与动能之和对时间的全导数，右边是作用与该体积的质量力和表面力的功率，加上单位时间内由该体积输出到外界的热量。

体积分与其表面积分的转换关系

为了变换积分项，试考虑任意量 $L(\mathbf{r},t)$ 在时间内 δt 的体积分变化是

$$\delta \int_{\tau} L d\tau = \int_{\tau} \delta L d\tau + \int_{\Sigma} L \delta \boldsymbol{\xi} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

其中 $\delta \boldsymbol{\xi}$ 为表面上的某点在时间 δt 内引起的位移。上式两边除 δt 以，得到

$$\begin{aligned} d(\int_{\tau} L d\tau)/dt &= \int_{\tau} (\partial L/\partial t) d\tau + \int_{\Sigma} L (\partial \boldsymbol{\xi}/\partial t) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \\ &= \int_{\tau} (\partial L/\partial t) d\tau + \int_{\Sigma} L \mathbf{u} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \\ &= \int_{\tau} (\partial L/\partial t) d\tau + \int_{\tau} \nabla \cdot (\mathbf{u}L) d\tau \end{aligned} \quad [1.5.9]$$

利用这个关系式，能量积分形式的左右边可以改写成

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \{ \partial [\rho(\varepsilon + \mathbf{u}^2/2)] / \partial t + \nabla \cdot [\mathbf{u} \rho(\varepsilon + \mathbf{u}^2/2)] \} d\tau = \\ \int_{\tau} \{ \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \} d\tau \end{aligned} \quad [1.5.10]$$

由于 τ 的任意性，被积函数必须等于零，合并同类项，由此得到

$$\frac{\partial[\rho(\varepsilon + \mathbf{u}^2/2)]}{\partial t} + \nabla \cdot [\mathbf{u} \rho(\varepsilon + \mathbf{u}^2/2)] - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad [1.5.11]$$

利用连续方程 [1.5.1], 上方程可以改写成

$$\rho \frac{d(\varepsilon + \mathbf{u}^2/2)}{dt} = \nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad [1.5.12]$$

就是能量方程。

根据富里叶定律，单位时间内通过单位面积的热量与温度梯度成比例。因此，[1.5.12]式中的 q 可以写成

$$q = -\kappa \nabla T \quad [1.5.13]$$

κ 称为热导率。

实际上，在不同的问题中还要用到能量方程的其他一些形式，他们是利用连续方程、运动方程和热力学关系式对能量方程进行变换而得到的。下面我们导出流体的热传递方程。

在方程[1.5.11]中帶入 $\mathbf{P}=-p\mathbf{I}+\mathbf{X}$ ，略去重力項得到

$$\partial[\rho(\varepsilon+u^2/2)]/\partial t = -\nabla \cdot \{\rho \mathbf{u}(h+u^2/2) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{X} - \kappa \nabla T\} \quad [1.5.14]$$

其中 $h= \varepsilon+ p/\rho$ 為單位質量流體的热焓。把上式左边項展开

$$\partial[\rho(\varepsilon+u^2/2)]/\partial t = (u^2/2)\partial\rho/\partial t + \rho \mathbf{u} \cdot \partial \mathbf{u} / \partial t + \rho \partial \varepsilon / \partial t + \varepsilon \partial \rho / \partial t \quad [1.5.15]$$

并将其中的 $\partial\rho/\partial t$ 和 $\partial \mathbf{u} / \partial t$ 分別用連續方程和运动方程代入，得到

$$\begin{aligned} \partial[\rho(\varepsilon+u^2/2)]/\partial t = & - (u^2/2) \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla (u^2/2) - \mathbf{u} \cdot \nabla p + \\ & + u_i \partial \chi_{ij} / \partial x_j + \rho \partial \varepsilon / \partial t - \varepsilon \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \end{aligned} \quad [1.5.16]$$

根据热力学第一定律有

$$d\varepsilon = TdS - pdV = TdS + (p/\rho^2)d\rho \quad [1.5.17]$$

其中S是熵，V是比容，因此

$$\partial\varepsilon/\partial t = T\partial S/\partial t + (p/\rho^2) \partial\rho/\partial t = T\partial S/\partial t - (p/\rho^2) \nabla \cdot (\rho \mathbf{u})$$

将其带入方程[1.5.16]得到

$$\begin{aligned} \partial[\rho(\varepsilon + u^2/2)]/\partial t = & - (u^2/2 + h) \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla (u^2/2) - \mathbf{u} \cdot \nabla p \\ & + \rho T \partial S/\partial t + u_i \partial \chi_{ij} / \partial x_j \end{aligned} \quad [1.5.18]$$

再由 $dh = TdS + dp/\rho$ ，有

$$\nabla p = \rho \nabla h - \rho T \nabla S \quad [1.5.19]$$

并且(1.5.18)式右方最后一项还可以写成

$$u_i \partial \chi_{ij} / \partial x_j = \partial (u_i \chi_{ij}) / \partial x_j - \chi_{ij} \partial u_i / \partial x_j = \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{X}) - \chi_{ij} \partial u_i / \partial x_j \quad [1.5.20]$$

将它们代入[1.5.18]式，整理后得到

$$\begin{aligned} \partial[\rho(\varepsilon + u^2/2)] / \partial t = & - \nabla \cdot \{ \rho \mathbf{u} (u^2/2 + h) - \mathbf{u} \cdot \mathbf{X} - \kappa \nabla T \} \\ & + \rho T (\partial S / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla S) - \chi_{ij} \partial u_i / \partial x_j - \nabla \cdot \kappa \nabla T \end{aligned} \quad [1.5.21]$$

此式与(1.5.14)式比较，即得到热传递方程

$$\rho T (\partial S / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla S) + \chi_{ij} \partial u_i / \partial x_j - \nabla \cdot \kappa \nabla T = 0 \quad [1.5.22]$$

变换为

$$T \, dS/dt = \rho \, T \, (\partial S/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla S) = \chi_{ij} \, \partial \mathbf{u}_i / \partial x_j + \nabla \cdot (\nabla \kappa T) \quad [1.5.23]$$

即所谓**热传递方程**。等式左侧表示在单位时间内单位体积流体热能的增量，右侧第一项是该体积流体在单位时间内由于粘滞性耗散为热能的能量，第二项是单位时间内通过热传导传入该单位体积流体的热能。

可以证明

$$\chi_{ij} \, \partial \mathbf{u}_i / \partial x_j = (\eta/2) \, \Sigma_{ij} (\partial \mathbf{u}_i / \partial x_j + \partial \mathbf{u}_j / \partial x_i)^2 + [\zeta - (2/3)\eta] (\partial \mathbf{u}_m / \partial x_m)^2 \quad [1.5.24]$$

由此不难看出，在 $\eta > 0$ 和 $\zeta > 0$ 的任何情形，总是满足

$$\chi_{ij} \, \partial \mathbf{u}_i / \partial x_j \geq 0$$

]

如果流体是无粘滞性的、不传热的理想气体，则由[1.5. 24]式得到如下结论：流体的熵守恒，即

$$S=\text{常数} \quad [1.5.25]$$

因为理想气体的熵

$$S=C_v \ln p / \rho^\gamma + \text{常数} \quad [1.5.26]$$

其中 C_v 为气体的定容比热， γ 是比热比，因此得到

$$p / \rho^\gamma = \text{常数} \quad [1.5.27]$$

当然，对于不同的流体元而言，[1.5.25]和[1.5.27]的常数值是不同的。

1.6 运动导电流体内的准静态电磁场方程

上面导出了使用于一般流体的动力学方程。现在研究电磁场中运动的导电流体。

当导电流体在电磁场中运动时，流体内感生出电场，从而产生电流。这个电流一方面与磁场相互作用，产生机械力，对流体运动产生重大影响；另一方面感应出改变原有电磁场的磁场。于是就形成了电磁现象和流体动力学现象相互作用的复杂图像。这些现象必须要用电磁场方程和流体动力学方程的联立方程组来进行研究。

电磁现象的一般规律满足麦克斯韦方程：

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t + \mu_0 \mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho_q / \varepsilon_0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [1.6.1]$$

欧姆定律和劳伦兹力公式是

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad [1.6.2]$$

$$\mathbf{f} = \rho_q \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad [1.6.3]$$

这里假定介质是静止（对参考系K而言， $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 等就是在这个参考系内定义的）。特别是电流与电场之间的关系，一般说来只适用于静止的导体。

为了求出运动导电流体内电流和电场的关系式，我们从参考系K变换到另一个以速度 $\mathbf{u}$ 相对于K运动的参考系K'，其中导电流体在所考虑的时刻是静止的。在这个参考系内，我们有 $\mathbf{j}' = \sigma \mathbf{E}'$ ，其中 $\mathbf{E}'$ 为K'内的电场强度。根据相对论关于场变换的公式，准确到 u^2/c^2 的量级， $\mathbf{E}'$ 用K系内的场表示为

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad [1.6.4]$$

于是得到

$$\mathbf{j}' = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad [1.6.5]$$

这就是确定运动导电流体内电流与电场之间关系的公式。为了得到参考系K中 $\mathbf{j}$ 的表达方式，我们考虑电流密度的一般定义： $\mathbf{j} = \rho_q \mathbf{v}$ ， $\mathbf{j}' = \rho_q \mathbf{v}'$ ，其中 $\mathbf{v}$ ， $\mathbf{v}'$ 分别是电荷在坐标系K和K'内的速度。在K和K'的相对速度 $\mathbf{u}$ 远小于光速($u^2/c^2 \ll 1$)的非相对论情形，速度按伽利略公式变换：

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

由此得到

$$\mathbf{j}' = \rho_q \mathbf{v}' = \rho_q (\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \mathbf{j} - \rho_q \mathbf{u}$$

即

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}' + \rho_q \mathbf{u} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \rho_q \mathbf{u} \quad [1.6.6]$$

如果，磁流体力学范围内运流电流 $\rho_q \mathbf{u}$ 与传导电流比较可以略去。那末，在这种情况下，从一参考系变换到另一参考系时，电流值就基本保持不变：

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}' \quad [1.6.7]$$

物质内的交变电磁场的特征，主要决定物质的种类和场频率的量级。在磁流体力学范围内，通常研究的是在外加交变磁场内的大导电流体中产生的现象。这时我们可以假定，场的变化速度不很大，满足如下一些条件。

首先假定对应于场频率的波长，大于流体运动的特征长度 L ，即

$$\lambda \sim c/\omega \gg L \text{ 或 } L/(cT) \ll 1 \quad [1.6.8]$$

其中 $T \sim 1/\omega$ 为场变化的特征时间。其次假定电导率 σ 和场频率之比满足：

$$\sigma/(\epsilon_0\omega) \gg 1 \text{ 或 } \epsilon_0/(\sigma T) \ll 1 \quad [1.6.9]$$

即场变化的特征时间远大于粒子碰撞时间，由于等离子体是良导体，这一条件实际上总是满足的。满足这些条件的电磁场和电流称为**准静态**的。

当满足上述条件时，[1.6.1]式中的位移电流 $\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ 、[1.6.6] 式中的运流电流 $\rho_q \mathbf{u}$ 和 [1.6.3] 式中的电场力 $\rho_q \mathbf{E}$ 可以忽略。事实上

$$|\varepsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t| / |\mathbf{j}| \Rightarrow \varepsilon_0 |\mathbf{E} / T| / \sigma |\mathbf{E}| = \varepsilon_0 / \sigma T \ll 1 \quad [1.6.10]$$

$$|\rho_q \mathbf{u}| / |\mathbf{j}| \Rightarrow |\mathbf{u}| \varepsilon_0 |\nabla \cdot \mathbf{E}| / (|\nabla \times \mathbf{B}| / \mu_0) \Rightarrow \varepsilon_0 \mu_0 L |\mathbf{E}| / (T |\mathbf{B}|) = (L / c T)^2 \ll 1 \quad [1.6.11]$$

$$|\rho_q \mathbf{E}| / |\mathbf{j} \times \mathbf{B}| \Rightarrow \varepsilon_0 |\nabla \cdot \mathbf{E}| |\mathbf{E}| / (|\mathbf{B}| |\nabla \times \mathbf{B}| / \mu_0) \Rightarrow \varepsilon_0 \mu_0 (|\mathbf{E}| / |\mathbf{B}|)^2 = (L / c T)^2 \ll 1 \quad [1.6.12]$$

这里利用了 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_q / \varepsilon_0$, $\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$, $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ ($\Rightarrow |\mathbf{E}| / L = |\mathbf{B}| / T \Rightarrow |\mathbf{E}| / |\mathbf{B}| = L / T$) 及 $\mu_0 \varepsilon_0 = c^{-2}$ 等关系式，并且假定 $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ 。

于是运动导电流体内的**准静态**电磁场方程，欧姆定律和劳伦兹力公式可以写成

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho_q / \epsilon_0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [1.6.13]$$

欧姆定律和劳伦兹力公式是

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad [1.6.14]$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad [1.6.15]$$

1.7 磁力、磁应力

关于磁力 $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ ，我们做展开来分析其作用性质。

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} / \mu_0 = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} / \mu_0 - \nabla B^2 / 2\mu_0 \quad [1.7.1]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

$$\text{因此 } \mathbf{f} = (\nabla \cdot \mathbf{B} \mathbf{B} / \mu_0 + B^2 \mathbf{I} / 2\mu_0) = \nabla \cdot \mathbf{T} \quad [1.7.2]$$

其中 $\mathbf{I}$ 是单位矩阵， $\mathbf{T} = (\mathbf{B} \mathbf{B} + B^2 \mathbf{I} / 2) \mu_0$ 为麦克斯韦电磁应力张量的磁场部分。试考虑任意体积 τ ，在此体积上积分得到合力。体积分可以变换成面积分，于是合力还可以解释成一组等效的表面力。于是

$$\int_{\tau} \mathbf{f} d\tau = \int_{\Sigma} \mathbf{T}_n d\sigma \quad [1.7.3]$$

其中 $\mathbf{T}_n = (\mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) + B^2 \mathbf{n}/2)\mu_0$ 为作用在单位法线矢量为 $\mathbf{n}$ 的面元上的等效表面力——**磁应力**。[1.7.3]式表明了体积力和等效表面力的关系。

设平行于磁场的单位矢量为 $\mathbf{b}$ ，则可以把[1.7.3]写成

$$\int_{\tau} \mathbf{f} \, d\tau = \int_{\Sigma} B^2/2\mu_0 (-\mathbf{n} \, d\sigma) + \int_{\Sigma} B^2/\mu_0 (\mathbf{b} \cos\theta \, d\sigma) \quad [1.7.4]$$

其中 θ 为 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{n}$ 之间的夹角。由此可见，磁力等效于大小为 $B^2/2\mu_0$ 的各向同性磁压力和沿磁力线方向、大小为 B^2/μ_0 的张力之和，或者说，磁力等效于与磁力线相垂直方向的压力 $B^2/2\mu_0$ 和沿磁力线方向的张力 B^2/μ_0 之和(见图1.7.1)。

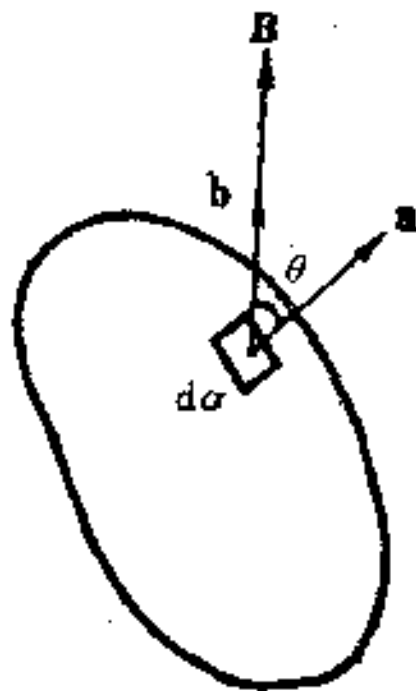


图1.7.1 解释等效表面力的图示

1.8 磁流体力学方程组

对于在电磁场中运动的导电流体，仍然要从质量守恒、动量守恒和能量守恒定律得到流体动力学方程。一般情况下在空间物质宏观运动方程中的外加质量力主要是电磁力和重力。通常情况下电磁力远大于重力，我们将略去重力。于是，我们得到考虑了电磁力的流体动力学方程如下：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \\ \rho \frac{d(\varepsilon + u^2/2)}{dt} &= \nabla \cdot (\mathbf{P} \mathbf{u}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - \nabla \cdot \mathbf{q} \end{aligned} \right\} \quad [1.8.1]$$

能量方程还可以写成热传递方程

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \chi_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \quad [1.8.2]$$

其中 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ 为电磁场引起的焦耳热产生率。

运动方程和能量方程也可以写成像连续方程那样的守恒形式。这种式不仅物理意义更明确，在计算应用上也是重要的。为此，需要进行变换。并利用连续方程，那么[1.8.1]可以化成

$$\left. \begin{aligned} \partial \rho / \partial t &= -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \\ \partial \mathbf{G} / \partial t &= -\nabla \cdot \mathbf{\Pi} \\ \partial \mathbf{W} / \partial t &= -\nabla \cdot \mathbf{S} \end{aligned} \right\} \quad [1.8.3]$$

这里 $\mathbf{G} = \rho \mathbf{u}$

$$\mathbf{\Pi} = \rho \mathbf{u} \mathbf{u} - \mathbf{P} - \mathbf{T}$$

$$\mathbf{W} = \rho \left(\epsilon + u^2/2 \right) - B^2/2 \mu_0$$

$$\mathbf{S} = \rho \mathbf{u} \left(\epsilon + u^2/2 \right) - (P \mathbf{u}) + \mathbf{q} + \mathbf{s}$$

$\mathbf{s} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) / \mu_0$ 为电磁能流密度（波印亭矢量）

其中应用了下列变换

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} &= \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \mu_0 \\ &= 1/\mu_0 [-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})] \\ &= -\nabla \cdot \mathbf{s} - \partial w / \partial t\end{aligned}\quad [1.8.4]$$

$$\text{其中 } \mathbf{s} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) / \mu_0 \quad w = B^2 / 2 \mu_0$$

$$\partial w / \partial t = -\nabla \cdot \mathbf{s} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad [1.8.4a]$$

由电动力学知道， $\mathbf{s}$ 为电磁能流密度（波印亭矢量）； w 是磁能密度。等式[1.8.4]表明，在某个体积里，单位时间内磁能的变化是通过该体积界面的电磁能流和导电流体对场所做的功（ $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ ）所引起的。

在方程[1.8.3]中 $\mathbf{G}$ ——动量密度； Π ——总动量密度张量； W ——总能量密度； $\mathbf{S}$ ——总能流密度。

方程组[1.8.3]积分形式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho \, d\tau &= - \int_{\Sigma} \rho u_n \, d\sigma \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \mathbf{G} \, d\tau &= - \int_{\Sigma} \Pi \mathbf{n} \, d\sigma \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \mathbf{W} \, d\tau &= - \int_{\Sigma} \mathbf{S}_n \, d\sigma \end{aligned} \quad [1.8.5]$$

其中第一个方程表示，在任意静止的导电流体体积内质量的改变是由于通过该体积界面的质量流所引起的，在单位时间内从法线方向为 $\mathbf{n}$ 的面元上流过去的质量为 $\rho u_n \, d\sigma$ 。

[1.8.5]式中第二个方程表示，在任一静止的导电体体积内总动量的改变是由于通过该体积界面的动量流所引起的，通过法线方向为 $\mathbf{n}$ 的单位面积上的动量流密度为

$$\Pi_{\mathbf{n}} = \rho \mathbf{u} u_n + (p + \mathbf{B}^2 / 2 \mu_0) \mathbf{n} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{B} \mathbf{B}_n / \mu_0$$

[1.8.5]式中最后一个方程表示，在某个体积内总能量的改变是由于通过该体积界面的能流所引起的。在单位时间内流过法向为 $\mathbf{n}$ 的单位面积的能量为

$$S_n = \rho (\varepsilon + u^2 / 2) u_n + \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + q_n + (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} / \mu_0$$

在以后的具体计算里，我们假定所讨论的导电流体是完全气体，即温度和内能由如下关系式所确定：

$$p = RT\rho; \quad \varepsilon = C_v T = p / [(\gamma - 1)\rho], \quad [1.8.6]$$

这里 C_v 是气体的定容比热，以后认为它是常数； R 是气体常数， γ 是绝热指数， $\gamma = C_p / C_v = (R + C_v) / C_v$ 为其中 C_p 为气体的定压比热。

单流体力学方程组

根据以上所述，描述导电流体和电磁场运动的方程组是：

$$\left. \begin{array}{ll}
 \text{连续性方程} & \partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\
 \text{运动方程} & \rho d\mathbf{u} / dt = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\chi}) \\
 \text{能量方程} & \rho T dS / dt = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \Phi + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \\
 \text{状态方程} & p = RT \rho \\
 \text{麦克斯韦方程} & \nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \\
 & \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \\
 & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\
 \text{欧姆定律} & \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})
 \end{array} \right\} [1.8.7]$$

这组方程称为磁流体力学方程组，其中

$$\left. \begin{array}{l}
 \nabla \cdot \boldsymbol{\chi} = (\zeta + \eta/3) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \eta \nabla^2 \mathbf{u} \\
 \nabla \cdot \mathbf{q} = -\kappa \nabla T \\
 \Phi = \sum_{ij} \eta/2 (\partial \mathbf{u}_i / \partial x_j + \partial \mathbf{u}_j / \partial x_i)^2 + [\zeta - (2/3)\eta] (\nabla \cdot \mathbf{u})^2
 \end{array} \right\} [1.8.8]$$

这里我们已经假定导电流体是完全气体，因此粘滞应力张量和热流矢量中的 η , ζ 和 κ 均为常数。方程组[1.8.7]共计十六个标量方程，包含 u , ρ , T , p , S , E , B , j 等十六个未知标量，因此方程组是完备的。

如果流体是无粘滞性的、不传热的和理想导电的所谓理想导电流体，则 q , χ 和 $1/\sigma$ 均等于零，而方程组[1.8.7]可化为：

$$\left. \begin{aligned} \partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \rho d\mathbf{u} / dt &= -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \\ p \rho^{-\gamma} &= \text{常数} \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} \end{aligned} \right\} \quad [1.8.9]$$

这组方程称为理想流体力学方程组。注意，对于理想导电流体，欧姆定律变成

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0 \quad [1.8.10]$$

等离子体 β 参数

考虑在等离子体平衡状态时， $d\mathbf{u}/dt=0$ ，因此从方程[1.8.7]得到

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad [1.8.11]$$

由于 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ ，上方程又可写为

$$\begin{aligned} \nabla p &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) / \mu_0 \\ &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} / \mu_0 - \nabla B^2 / 2\mu_0 \end{aligned} \quad [1.8.12]$$

如果磁场沿 $\mathbf{B}$ 着方向并不发生变化（例如，在均匀直线磁场的情况下）上方程右边第一项为零。则得到

$$\nabla(p + B^2/2\mu_0) = 0 \quad [1.8.13]$$

或者在空间上

$$(p + B^2/2\mu_0) = \text{常数} \quad [1.8.14]$$

上式说明在平衡时，等离子体的热压和磁压之和是一个常数
等离子体 β 参数就定义为

$$\beta = \frac{\text{等离子体热压}}{\text{磁压}} = \frac{p}{B^2 / 2\mu_0} \quad [1.8.15]$$

等离子体 β 参数表明了等离子体的热压和磁压的相对重要性。
低 β 是指 $\beta \ll 1$ 的情况；高 β 是指 $\beta \approx 1$ 的情况。低 β 和高 β 在空间物理现象中都经常碰到。

平行于磁场的流动特性

利用流体方法来研究等离子体理论得到了许多进展。对于等离子体流动来说，可以借鉴流体力学的研究方法来考察其运动特性。当认为压力各向同性而其他外力是有势力时（ $\mathbf{F} = -\rho \nabla \Psi$ ，这里 Ψ 是势函数）运动方程可以写成

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\nabla p)/\rho + \nabla \Psi = \mathbf{j} \times \mathbf{B} / \rho \quad [1.8.16]$$

利用 $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla u^2/2 - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$ 上方程又可写为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla u^2/2 - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\nabla p)/\rho + \nabla \Psi = \mathbf{j} \times \mathbf{B} / \rho \quad [1.8.17]$$

对方程取旋度，方程左边第二项和第五项为零，则上方程又可写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) + \nabla (1/\rho) \times \nabla p = \nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B} / \rho) \quad [1.8.18]$$

其中 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ 是 $\mathbf{u}$ 的涡旋矢量。上方程在求解 $\boldsymbol{\omega}$ 是比较方便的。如果流场是无旋的 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 0$ ， $\mathbf{u}$ 可由标量势函数 Φ 的梯度来表示， $\mathbf{u} = -\nabla \Phi$ 。那末，对于无旋不可压缩等离子体流动，方程[1.8.16]变成

$$\nabla(\partial\Phi/\partial t + u^2/2 + p/\rho + \Psi) = \mathbf{j} \times \mathbf{B} / \rho \quad [1.8.19]$$

这里利用了 $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla u^2/2 - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$, 对寻常流体来说, 上方程右边为零。

用速度矢量标乘上方程给出

$$\mathbf{u} \cdot \nabla(\partial\Phi/\partial t + u^2/2 + p/\rho + \Psi) = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B} / \rho) \quad [1.8.20]$$

其中用到了 $(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{j} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{u})$ 。如果 $\mathbf{B} \parallel \mathbf{u}$ ，方程右边为零，得到

$$\mathbf{u} \cdot \nabla(\partial\Phi/\partial t + u^2/2 + p/\rho + \Psi) = 0 \quad [1.8.21]$$

这个方程表明 $\partial\Phi/\partial t + u^2/2 + p/\rho + \Psi$ 沿着 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{B}$ 是不变的。我们获得普遍性的结果为

$$(\partial\Phi/\partial t + u^2/2 + p/\rho + \Psi) = f(t) \quad [1.8.22]$$

这里 $f(t)$ 是时间的任意函数。再假如流动是稳态的， $\partial\Phi/\partial t = 0$ ，和 $f(t) = 0$ ，我们则获得

伯努利方程

$$u^2/2 + p/\rho + \Psi = \text{常数} \quad [1.8.23]$$

上式说明在稳态情况下，沿着流线或磁力线总能量是不变的。对于不同的流线，方程右边的常数是不一样的。但若流场是均匀的，则在整个流畅区域，右边的常数是同一个固定数。

当流场和磁场平行时，磁场可以写为

$$\mathbf{B} = \lambda \mathbf{u} \quad [1.8.24]$$

其中 λ 表示一个包含时间和空间参数的任意函数。从磁场的连续性方程 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 获得

$$\lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \lambda = 0 \quad [1.8.25]$$

上方程是关于函数 λ 必须满足的一个条件，假如是不可压流动，则 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ 。那末上方程变为

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \lambda = 0 \quad [1.8.26]$$

对于不可压流动，对 λ 的要求是沿着流线是不变的。在坐标中常数 λ 的曲面就是流线的曲面。当然沿着磁力线 λ 也是不变的。对于 λ ，有无穷多种选择，比如即可选 λ 为 $\lambda = f(u^2/2 + p/\rho + \Psi)$ ，又可选 λ 为 $\lambda = f(\rho)$ 。

因此，在流场与磁场平行时，磁流体力学大部分流动特性就基本上与寻常流体一样。

1.9 完全电离等离子体的二流体方程，广义欧姆定律

在前面导出磁流体力学方程时，我们是把等离子体看作是单一的导电流体来考虑的。然而，实际的等离子体是由三种成分——电子、离子和中性粒子气体所组成的。对于完全电离的等离子体则由电子气体和离子气体所组成。因此，一般来说，应把等离子体看成由两种导电流体所组成，分别考虑它们的运动，同时考虑它们之间的耦合，这就是等离子体的所谓二流体模型。

为简单起见，下面我们考虑最简单的模型，即认为电子气体和离子气体各自独立的运动着，因而对每种成分可以分别写出它的流体动力学方程。不同成分之间由于碰撞而产生的相互作用可以归结为某个平均的体积力，它的大小等于不同成分粒子在碰撞时动量变化率的平均值。另外，认为电子气体和离子气体都是理想气体，因而它们内部的应力只有压力。这时，我们可以直接写出二流体方程如下：

$$\text{连续方程} \quad \partial n_{\alpha} / \partial t + \nabla \cdot (n_{\alpha} \mathbf{u}) = 0 \quad [1.9.1]$$

$$\text{运动方程} \quad n_{\alpha} m_{\alpha} d\mathbf{u}_{\alpha} / dt = -\nabla p_{\alpha} + n_{\alpha} q_{\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{B}) + \mathbf{M}_{\alpha \beta} \quad [1.9.2]$$

$$\text{麦克斯韦方程} \quad \left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \partial \mathbf{E} / \partial t + \mu_0 \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 1/\varepsilon_0 \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [1.9.3]$$

这里 $\alpha = e, i$ 分别表示电子或离子气体； q_α 是 α 成分粒子的电荷，对于氢等离子体， $q_i = -e$ ， $q_e = e$ ； m_α 和 n_α 分别为粒子的质量和数密度， $n_\alpha m_\alpha$ ， $n_\alpha q_\alpha$ 和 $n_\alpha q_\alpha u_\alpha$ 分别代表 α 成分流体的质量密度，电荷密度和电流密度。

[1.9.2]式中 $\mathbf{M}_{\alpha\beta}$ 为两种流体之间由于碰撞而引起的动量变化率的平均值， $\mathbf{M}_{ei}$ 即表示单位时间内离子流体传给单位体积电子流体的动量， $\mathbf{M}_{ie}$ 而表示电子流体传给离子流体的动量。根据作用与反作用相等的原理，显然有 $\mathbf{M}_{ie} = -\mathbf{M}_{ei}$ 。由理论力学知道，质量为 m_1, m_2 速度为 u_1, u_2 的两个粒子作弹性碰撞时动量变化的平均值是

$$M_{12} = (m_1 m_2 / m_1 + m_2) (u_2 - u_1)$$

所以我们可以合理地假定

$$M_{ei} = -M_{ie} = v_{ei} n (m_i m_e / m_i + m_e) (u_i - u_e) \quad [1.9-4]$$

其中 v_{ie} 是电子和离子的平均碰撞率。这里假定粒子由于碰撞而偏转在任何偏转角上的几率都是相等的。

下面由二流体模型导出完全电离等离子体中联系总电流密度和其他量之间关系的表示式（即所谓广义欧姆定律）。注意假定了

- 1) 等离子体是电中性的，即 $n_i = n_e = n$
- 2) 问题的特征时间比粒子的平均碰撞时间大的多，即等离子体处于局部热平衡状态， $p_e \approx p_i \approx p(\text{总压})/2$ （ $m v_e^2 = m v_i^2$ ），而流体的宏观速度远小于离子的热运动速度， $u_\alpha \ll v_\alpha$ 因而 u_e , u_i , j 及其微商的二次项与压力梯度相比均可忽略。
- 3) 由于 $m_e \ll m_i$ ，含 m_e / m_i 的项可以略去。

我们从二流体方程[1.9.2]出发：

$$nm_e [\partial \mathbf{u}_e / \partial t + (\mathbf{u}_e \cdot \nabla) \mathbf{u}_e] = -\nabla p_e - ne(\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) + \mathbf{M}_{ei} \quad [1.9.5]$$

$$nm_i [\partial \mathbf{u}_i / \partial t + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i] = -\nabla p_i + ne(\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) + \mathbf{M}_{ie} \quad [1.9.6]$$

利用上述3个假定条件和连续方程并忽略小量获得如下广义欧姆定律

*[家庭作业：推出[1.9.7]。提示：利用 e/m_e 和 e/m_i 因子并两式相减，且 $m_e + m_i \approx m_i$ 的近似和 $\mathbf{u} = (m_i \mathbf{u}_i + m_e \mathbf{u}_e) / (m_i + m_e)$ 。还利用方程[1.9-4]即： $\mathbf{M}_{ei} = -\mathbf{M}_{ie} = v_{ie} (m_i m_e / m_i + m_e) (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)。$]

广义欧姆定律

$$(m_e / ne^2) \partial \mathbf{j} / \partial t = (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla p / (2ne) - (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) / ne - v_{ei} m_e \mathbf{j} / (ne^2)$$

[1.9.7]

上式右方各项分别是洛伦兹力、热压力、霍尔电动力和电阻效应的贡献。由此可见，一般来说，等离子体中的电流不仅与等离子体本身的物理性质和电场强度有关，而且还取决于被研究问题的力学特征（速度，压力等）和磁场强度的大小。只有在稳态（ $\partial \mathbf{j} / \partial t = 0$ ）和 $\mathbf{B} = \nabla p = 0$ 时，广义欧姆定律才退化为通常形式的欧姆定律，

即

$$\mathbf{j} = ne^2 \mathbf{E} / v_{ie} m_e \quad [1.9.8]$$

同 $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ 比较可以看出，电导率

$$\sigma = ne^2 / v_{ie} m_e \quad [1.9.9]$$

为了比较各种参数在确定广义欧姆定律时所引起的作用的大小，我们来估计一下[1.9.7]式各项的相对量级。设 L 和 $T \sim \omega^{-1}$ 分别为场发生显著变化的特征长度和特征时间，这时要使流动与电磁场之间的相互作用显著，可以预计 $U \sim \omega L$ 。对麦克斯韦方程 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ 作量纲分析可知，

$$1 = |\nabla \times \mathbf{E}| / |\partial \mathbf{B} / \partial t| \sim EL^{-1}BT^{-1} \sim E/(BU)$$

$$\text{即} \quad E/B \sim U$$

于是 E 和 $|\mathbf{U} \times \mathbf{B}|$ 的相对量级为

$$= |\mathbf{E}| / |\mathbf{U} \times \mathbf{B}| \sim E/UB \sim 1$$

在广义欧姆方程 [1.9.7] 中左边项与 E 之比为

$$|m_e / (ne^2) \partial \mathbf{j} / \partial t| / |\mathbf{E}| \sim |m_e / (ne^2) T^{-1} \mathbf{j}| / |\mathbf{E}|$$

$$\sim m_e \varepsilon_0 / (ne^2) T^{-1} L^{-1} B / (\varepsilon_0 \mu_0 E) \sim c^2 / (\omega_p^2 ULT) \sim (\omega c / \omega_p U)^2$$

其中 $c^2 = \varepsilon_0 \mu_0$, $\omega_p = (ne^2 / m_e \varepsilon_0)^{-1/2}$ 为等离子体频率

类似地可得其他各项的相对量级。[1.9.7]式自左至右各项的相对量级是

$$(\omega / \omega_p)^2 (c / U)^2 : 1 : 1 : (\omega / \omega_{ci}) (c_s / U)^2 : (\omega / \omega_p) (\omega_{ce} / \omega_p) (c / U)^2 : (\omega / \omega_p) (v_{ie} / \omega_p) (c / U)^2 \quad [1.9.10]$$

此处 $c_s \sim (p / \rho)^{1/2}$ 为声速； $\omega_{ce} = eB / m_e$ 为电子回旋频率， $\omega_{ci} = eB / m_i$ 为离子回旋频率。由此可见，当满足

$$\omega / \omega_p \ll U / c \quad [1.9.11]$$

时， $\partial \mathbf{j} / \partial t$ 项可以忽略。当

$$(\omega \omega_{ce}) / \omega_p^2 \ll (U / c)^2 \quad [1.9.12]$$

时，霍耳电动力项 $(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) / ne$ 可以忽略。当

$$\omega / \omega_{ci} \ll (U / c_s)^2 \quad [1.9.13]$$

时，压力项也可以忽略。若条件[1.9.11]——[1.9.13]全都满足，则广义欧姆定律变为

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad [1.9.14]$$

如果进一步满足条件

$$\omega v_{ie} / \omega_p^2 \ll (U/c)^2 \quad [1.9.15]$$

则[1.9.7]式变为

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad [1.9.16]$$

它对应于 $\sigma = \infty$ 的理想导电流体情形。

1.10 感应方程 磁扩散和冻结

导电流体和磁场相互作用有一些特殊的重要性质——如磁扩散和冻结效应。从麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

和欧姆定律 $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$

假设 σ 为常数，利用 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B}$ ，消去 $\mathbf{j}$ ， $\mathbf{E}$ 得

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nu_m \nabla^2 \mathbf{B} \quad [1.10.1]$$

上式称为**感应方程**，其中 $\nu_m = 1/(\sigma \mu_0)$ ，其量纲与流体力学中粘滞系数的量纲相同，称为**磁粘滞系数**。

磁场在导电流体中的运动性质显著地依赖于[1.10.1]式右边两项的相对比值：

$$|\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})| / |\mathbf{v}_m \nabla^2 \mathbf{B}| \sim |\mathbf{u} \times \mathbf{B}| / |\mathbf{v}_m \nabla \times \mathbf{B}| \sim UL / \mathbf{v}_m$$

此处L是与场的广延大小可以比的特征长度，U为流体运动的特征速度。类似于流体力学中的雷诺数，定义**磁雷诺数**如下：

$$R_m = UL / \mathbf{v}_m \quad [1.10.2]$$

下面分别考察两种极端情形，

当 $R_m \ll 1$ ，或流体为静止时，感应方程[1.10.1]变为

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \mathbf{v}_m \nabla^2 \mathbf{B} \quad [1.10.3]$$

它具有扩散方程形式，表示导电流体中的磁场通过从强度大的区域向强度小的区域扩散发生变化，变化的速率与 $\mathbf{v}_m$ 有关，故有时也称 $\mathbf{v}_m$ 为**磁扩散系数**。从量纲分析可知，如果磁场原来集中在以特征长度L所表征的区域中，则磁场从此区域扩散出去而衰减的特征时间为

$$\tau_d \sim L^2 / \mathbf{v}_m = \sigma \mu_0 L^2 \quad [1.10.4]$$

这表明，流体的电导率愈大，磁场衰减就愈慢。如果是 $\sigma=\infty$ 的理想导体，磁场就不衰减。对于有限电导率的流体，其特征长度愈大，磁场衰减愈慢。例如，半径为1米的铜球， τ_d 的量级为10秒；在地核中 $\tau_d\sim 10^{12}$ 秒。表13.10.1中立出了一些典型导体中的磁场衰减时间。可以看出，对于宇宙中的等离子体，由于其巨大的广延度， τ_d 取很大值。

表1.10.1

	L(米)	τ_d	R_m
水银	0.1	10^{-2}	10^{-1}
电弧放电	0.1	10^{-3}	1
地核	10^6	10^{12}	10^7
太阳黑子	10^7	10^{14}	10^9
日冕	10^9	10^{18}	10^{12}

磁扩散本质上就是由于电磁感应而引起的，即变化的磁场引起感应电场和电流，此电流又引起磁场，因而从强度大的区域向强度小的区域扩散，并且由于导体的欧姆耗散，磁能变为热能，引起磁场的衰减。现在考虑磁能随时间的变化率。总磁能是

$$W_B = (1/2\mu_0) \int_V B^2 d\tau$$

积分范围包括磁场所占所有体积，它随时间的变化率是

$$\partial W_B / \partial t = (1/\mu_0) \int_V \mathbf{B} \cdot \partial \mathbf{B} / \partial t d\tau \quad [1.10.5]$$

由磁扩散方程[1.10.3]式，并考虑无穷处 B, j 为零，面积分等于零的条件，利用 $\nabla \times \mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B}$ 的关系将上式变为 [*家庭作业]

$$\partial W_B / \partial t = -(1/\sigma) \int_V j^2 d\tau \quad [1.10.6]$$

上式表明，导电流体中磁能减少，是由于电阻引起的欧姆耗散使磁能变为流体热能的结果。由此可见，磁扩散同时又是磁衰减过程。

当 $R_m \gg 1$ ，或流体的电导率为 ∞ 时，[1.10.1]式变为

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad [1.10.7]$$

它在形式上和无粘滞不可压缩流体中涡旋满足的方程

$$\partial \boldsymbol{\omega} / \partial t = \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) \quad [1.10.8]$$

完全相同。方程[1.10.8]的意义是涡旋粘附于流体质点上，随着它一起运动。由此可见，方程[1.10.7]的意义是，磁场的变化如同磁力线粘附于流体质点上随它一起运动——或者说磁力线被“冻结”在导电流体中一样。因此，方程[1.10.7]也叫**冻结方程**。冻结效应可以这样理解：当理想导电流体在磁场中运动时，由于流体相对于磁力线的运动将引起感应电场，而既然流体的电导率为无穷大，感应电场必趋于零，因而也就没有流体相对于磁力线的运动，也即磁力线必随着流体一起运动。

冻结方程[1.10.7]可以表示成如下两个定理

1)在理想导电流体中通过和流体一起运动的任意曲面的磁通量不随时间改变。

2)在理想导电流体中起初位于磁力线上的流体元以后一直位于该磁力线上。

先证明第一个定理，为此考虑[1.10.7]式左边通过任意流体曲面（周线为L）的通量。利用斯托克斯定理得到

$$\int_{\Sigma} \partial \mathbf{B}_n / \partial t d\sigma - \oint_L (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad [1.10.9]$$

现在我们来讨论两个时刻 t_1 和 t_2 。令 Σ_1 为流体曲面在时刻 t_1 的位置， Σ_2 为它在时刻 t_2 的位置， Σ_3 是周线L上的质点在时间内的运动轨迹所组成的曲面（图1.10.1）。

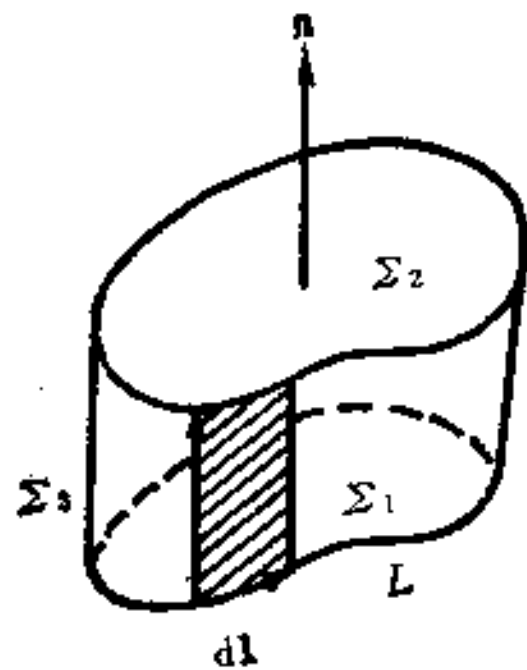


图1.10.1

根据磁场为涡旋场的性质，已知通过任意闭合曲面 $\mathbf{B}$ 的通量流等于零。所以对曲面 $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$ 来讲，在时刻 t_2 这个条件可以写成，

$$\int_{\Sigma_2} \mathbf{B}_n(t_2) d\sigma - \int_{\Sigma_1} \mathbf{B}_n(t_2) d\sigma + \int_{\Sigma_3} \mathbf{B}_n(t_2) d\sigma = 0$$

在第二个积分前取负号表示曲面的法线向对所组成的体积来讲是指向内部的。若 $t_2 - t_1 = \Delta t$ 很小，可将上式改写成

$$\int_{\Sigma_2} \mathbf{B}_n(t_2) d\sigma - \int_{\Sigma_1} \mathbf{B}_n(t_1) d\sigma + \int_{\Sigma_1} \mathbf{B}_n(t_1) d\sigma - \int_{\Sigma_1} \mathbf{B}_n(t_2) d\sigma - \oint \mathbf{B}(t_1) \cdot (\mathbf{u} dt \times d\mathbf{l}) = 0$$

将上式除以 Δt 并让 Δt 趋近于零，可得

$$d \left(\int_{\Sigma} \mathbf{B}_n d\sigma \right) / dt - \int_{\Sigma} \partial \mathbf{B}_n / \partial t d\sigma - \oint (\mathbf{B} \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{l} = 0$$

由[1.10.9]式得到

$$d \left(\int_{\Sigma} \mathbf{B}_n d\sigma \right) / dt = 0 \quad [1.10.10]$$

这就是所要证明的。

这个结果可以直接从欧姆定律得到说明：对于理想导电流体 $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0$ ，这表示与流体一起以速度 $\mathbf{u}$ 运动的任意闭合回路中，相对于流动坐标系，外加电场和感应电场之和必须等于零，也即相对于流动坐标系电场须等于零，否则其中产生无限大电流，这是不可能的。根据法拉第定律，这意味着通过与流体一起运动的任意闭合回路的磁通量不变。

为了证明第二个定理，我们先把[(1.10.7)式右边展开，考虑到
 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 有

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{u}$$

上式又可写成

$$d\mathbf{B}/dt = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{u}$$

由连续方程，得

$$d\mathbf{B}/dt = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{B}/\rho) (d\rho/dt)$$

即

$$d(\mathbf{B}/\rho)/dt = (\mathbf{B}/\rho \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad [1.10.11]$$

另一方面，我们来研究某一“流线”，也即随流体元一起移动的线。设 $\delta \mathbf{l}$ 为流线的长度元，研究它如何随时间变化。如果 $\mathbf{u}$ 为线元一端上的流体速度，则在线元另一端上的流体速度为 $\mathbf{u} + (\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ 。因此，在时间 dt 内线元 $\delta \mathbf{l}$ 的改变为 $dt(\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ ，也即

$$d(\delta \mathbf{l})/dt = (\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad [1.10.12]$$

由[1.10.11]和[1.10.12]式我们看到，矢量 $\mathbf{B}/\rho$ 和 $\delta \mathbf{l}$ 随时间变化由同一种方程给出。这表明，如果这两个矢量起初是平行的，则以后也保持平行，而且它们的长度互成比例地改变，换言之，若 $t=0$ 时流体元 $d\mathbf{l}_0$ 的平行于 $\mathbf{B}_0$ ，并且刚好位于这根磁力线上，即 $d\mathbf{l}_0 = \varepsilon \mathbf{B}_0/\rho$ (ε 为比例常数)，则 t 时刻该流体元仍位于这根磁力线上，即

$$d\mathbf{l} = \varepsilon \mathbf{B}/\rho \quad [1.10.13]$$

线元 $d\mathbf{l}$ 的长度和 $\mathbf{B}/\rho$ 成正比。因此，在理想导电流体中起初位于磁力线上的流体元以后一直位于该磁力线上，或者说，磁力线仿佛“冻结”在和它一起移动的流体上。

由此可见，如果 $|\mathbf{dl}| = |\mathbf{dl}_0|$ ，则沿流体元运动的轨道， $\mathbf{B}/\rho$ 量保持不变；然而如果流体元在运动过程中伸长 $|\mathbf{dl}| > |\mathbf{dl}_0|$ ，则 $\mathbf{B}/\rho > \mathbf{B}_0/\rho_0$ ，这时如果运动流体是不可压缩的($\rho = \text{常数}$)，则 $\mathbf{B} > \mathbf{B}_0$ ，即磁场强度本身随“流线”的伸长成比例地改变。因此我们看到，在磁场中的导电流体中，总能量守恒的情况下能量可在流动和磁场之间转移。

上面讨论了导电流体和磁场相互作用的两种极端情形。一般情况下，不能把导电流体看成是理想导电的，也不能忽略流体运动影响，因而磁场的扩散和冻结将同时存在，即磁力线被运动流体所带动同时又在流体中弥散，或者说一面被带动一面又“漏”过流体。流动和磁场相对运动的程度，取决于磁雷诺数的大小。表1.10.1中列出了一些典型的磁雷诺数。可以看出，在宇宙中，由于 L 的庞大尺度，很易满足 $R_m \gg 1$ 的条件。但在实验室等离子体中，即使 σ 很大，但因为尺度小，不能满足这个条件。也就是说，在实验室等离子体中，磁力线较快地穿过物质而弥散，而在宇宙等离子体中，弥散极慢，可以认为磁力线几乎冻结在等离子体中。

1.11*箍缩效应

在热核聚变和其它应用中，等离子体被通过它的电流产生的自磁场所约束是很有趣和有利的效应。试考虑一个无限长的完全电离等离子体柱。当外加电场作用下其中流过大电流时，柱内外就会产生磁力线环绕自身电流的极向磁场。这个磁场和电流相互作用而产生的洛伦兹力总是指向中心轴，因而等离子体柱向里箍缩，并在箍缩过程中等离子体的密度和温度增加，因而其动力压强增加。可以想象，如果不考虑收缩过程中粒子的各种损失和导致放电柱破裂的不稳定性，那么在小于磁场向等离子体扩散的时间之内，动力压强和磁压强之间有可能达到平衡，这时柱半径不随时间改变，称为平衡箍缩。只要磁压强大于动力压强，柱半径就将随时间变化，这是个动力学过程，称为动力箍缩。

*非大纲内容

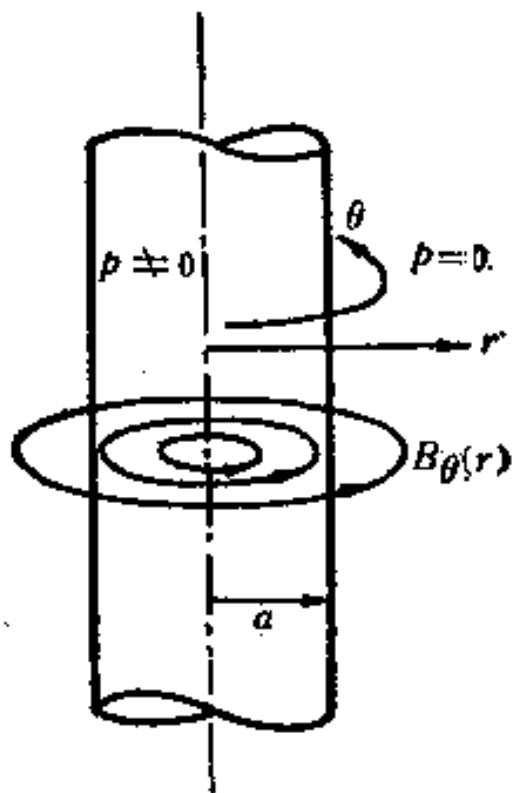


图1.11.1 平衡箍缩示意图

1.12 磁流体力学的适用条件

在寻常流体中，若 L 和 T 为特征长度和特征时间尺度，选取流体微元的尺度是 dr ，使得 $dr \ll L$ 。流体一般倾向于聚集在一起，这种聚集性由粒子的碰撞来保持在一起，流体微元内的粒子跑离流体微元企图被与相邻粒子的碰撞所阻止。定义 λ_c 和 t_c 为粒子碰撞的平均自由程及碰撞的平均时间。能用流体来描述粒子的运动状态意味着 $dr \gg \lambda_c$ 。在许多次碰撞之后，流体粒子趋近于稳定状态的结果又要求 $T \gg t_c$ ，在特征时间 T 内，流体的特性没有明显变化。

因此可用在寻常流体来描述的条件是

$$L \gg \lambda_c \quad [1.12.1]$$

$$T \gg t_c \quad [1.12.2]$$

将带电粒子作为流体来描述时，是否能用上述中性粒子的条件？答案是不确定的。因为中性粒子的碰撞只是涉及到相邻粒子之间的短程力，而带电粒子的碰撞涉及的是远程的电磁力，即使粒子相隔很远，也影响带电粒子的偏转。一个带电粒子的

轨道偏转会对其它所有带电粒子产生电磁效应。

带电粒子的一个重要特性就是在有磁场的存在下具有各向异性，沿着磁力线的运动和垂直于磁力线的运动大不相同。因此在这些不同方向上的碰撞也是大不相同的。即使在一个方向上能满足条件[1.12.1]和[1.12.2]。在另一个方向上未必能满足条件[1.12.1]和[1.12.2]。在行星际空间等离子体密度非常稀薄很难满足条件[1.12.1]和[1.12.2]。在这类区域粒子是无“碰撞”的， λ_c 和 t_c 的数值都非常大。因此，用流体来描述的条件需要修正。

设是带电粒子的回旋半径 r_c ，如果 $\lambda_c \gg r_c$ 则磁场中的带电粒子是无碰撞的，这个条件意味着磁场必须充分强。引入关于磁场的横向特征长度 $L_\perp$ 和横向特征时间 $T_\perp$ 。类似于寻常流体的适用条件，相应的磁流体力学的适用条件修正为

$$L_\perp \gg r_c \quad [1.12.3]$$

$$T_\perp \gg T_c \quad [1.12.4]$$

其中 T_c 是回旋周期，满足上述条件的带电粒子在垂直于磁场的方向就可以用寻常流体的类似方法来处理。

磁场起着把带电粒子绑在磁力线上的作用，因此。认为流体微元中的带电粒子被限制在垂直于磁场的方向运动的流体微元中。条件[1.12.3]和[1.12.4]意味着在垂直于磁场的方向上粘性和热传导必须很小。这个条件要求温度很低。几乎接近于零。如果粘性和热传导很小，进而这个条件又导致电阻很小，从而电流基本上是无阻碍的流动。如果没有电阻，就是理想导电流体，因此，磁流体运动也由方程 $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0$ 来确定。

在“冷”（ $T \approx 0$ ）等离子体近似条件下，垂直于磁场的方向运动的磁流体与宏观速度远大于热速度条件下的寻常流体行为极为相似。这种近似的好处是单流体方程组大大简化，广义欧姆定律也得到相应简化。虽然这种在“冷”（ $T \approx 0$ ）等离子体近似条件太苛刻，但可以较方便地获得许多基本的等离子体的特性，特别是在描述等离子体中波的传播方面。

在平行于磁场的方向上，洛伦兹力为零，流体的行为就象磁场不存在一样。对于无“碰撞”流体，同样忽略热传导和粘性效应。与垂直于磁力线的运动不耦合。通过变换，可以用两组方程分别处理平行于磁力线的运动和垂直于磁力线的运动。

磁流体动力学理论为太阳风和无“碰撞”弓激波提供了很好的物理描述。用磁流体动力学理论也能研究日球层，行星际结构，磁层（包括磁尾），电离层的大尺度结构。但是，对于许多空间区域（例如弓激波区和极光区）中的所观测到的精细结构，快速的时间变化和耗散过程等现象用磁流体动力学理论来解释就不适用。这些现象得用微观理论来解释。

第二章

等离子体波的磁流体理论

各小节内容

2.1 磁流体力学波

2.2 色散关系(一般形式)

2.3 均匀各向同性等离子体中的振荡与波

2.4 磁场中“冷”等离子体的介电张量 色散关系

2.5 截止与共振色散曲线

2.6 “冷”等离子体中平行于磁场方向传播的波

2.7 “冷”等离子体中垂直于磁场方向传播的波

2.8 在具有压力各向异性的等离子体中传播的磁流体波

2.9 非均匀等离子体中的低频漂移波

波__普遍存在的自然现象，物质运动的一种基本形式。

等离子体波是等离子体粒子的一种集体运动形式

这个领域的研究发展和重要性

等离子体振荡（Langmuir, 1 9 2 6）。

等离子体波的激发，传播和振荡；

天体物理中的各种电磁信号和太阳黑子成因；

无线电物理中电离层对电磁波的传播和反射；

微波技术中微波的产生、放大和传播；

受控热和聚变中的等离子体稳定性、波加热等离子体和

等离子体参数诊断等在理论和实验，生产与应用方面具有重要的科学指导意义。

波的特性和类型区别

等离子体的自身特性和所处的物理环境决定等离子体波的特性。等离子体是带电粒子所组成，因此其中的波动与热压强和电磁力相关。热压强梯度和静电力和磁力等三种力起着准弹性恢复力的作用。

单是热压强梯度会引起声波（纵波）。

单是静电力引起静电波（纵波）。

单是磁力会引起电磁波（横波）。

但是都在一起会引起复杂的混合类型的波。

电子和离子质量不同会产生不同频段和不同类型的波。

在有限空间的等离子体；

在空间不均匀的等离子体；

在各向异性的等离子体等

波动特征都不一样。

波的两大类

1、线性波

等离子体的线性波表现为小幅度的较缓和的扰动，波的幅度变化不大，对非线性的等离子体方程组中可以进行线性化处理，因此这类波动称为线性波。〔本章只讨论基本的线性振荡和波。〕

2、非线性波

非线性波表现为较强烈的扰动，如激波。〔在第三章中讨论。〕

2.1 磁流体力学波

在等离子体波中，磁流体力学波对于是物理量纲来说，是属于相对低频的波。可以用简单方法求得。

在通常流体中，唯一可能的小幅度波是纵(声)波。声波的传播速度决定于等熵情况下压强对密度的偏导数：

$$c_s^2 = (\partial p / \partial \rho)$$

若假定波动是绝热过程，因而满足 $p\rho^{-\gamma} = \text{常数}$ ，则

$$c_s^2 = \gamma p_0 / \rho_0$$

其中 $\gamma = C_p / C_v$

在磁场中的导电流体中，除声波外还可能产生其它类型的波。例如，磁力线的张力可能引起同磁力线横向振荡有关的横波。因为磁张力等于 B_0^2 / μ_0 ，因此可以预期这种波的传播速度是

$$V_A \sim (B_0^2 / \rho \mu_0)^{1/2}$$

考虑一个在稳态外磁场 B_0 中的均匀无界等离子体。为简单起见，假定等离子体是无粘性和理想导电的，但是可压缩的。略去全部耗散项之后的理想磁流体力学方程是：

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\
 \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \\
 \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
 \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} \\
 (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) &= 0 \\
 p \rho^{-\gamma} &= \text{常数}
 \end{aligned} \right\} \quad [2.1.1]$$

设考虑偏离平衡的小扰动

$$\left. \begin{aligned}
 \rho &= \rho_0 + \rho_1(\mathbf{r}, t) \\
 p &= p_0 + p_1(\mathbf{r}, t) \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t) \\
 \mathbf{j} &= \mathbf{j}_1(\mathbf{r}, t) \\
 \mathbf{E} &= \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \\
 \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t)
 \end{aligned} \right\} \quad [2.1.2]$$

这里脚标 0 表示物理量的平衡量，1 表示扰动量，将[2.1.2] 带入[2.1.1]，略去二次以上的小量，得到

$$\left. \begin{aligned}
 \partial \rho_1 / \partial t + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 &= 0 \\
 \rho_0 \partial \mathbf{u}_1 / \partial t &= -c_s^2 \nabla \rho_1 + \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0 \\
 \mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 &= 0 \\
 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_1) &= -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_1) + \nabla^2 \mathbf{E}_1 = -\partial \mathbf{j}_1 / \partial t
 \end{aligned} \right\} [2.1.3]$$

我们认为扰动量的变化为 $\sim e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t}$ 平面波解。上方程组变成

$$\left. \begin{aligned}
 \omega \rho_1 &= \rho_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1 \\
 \omega \rho_0 \mathbf{u}_1 &= c_s^2 \mathbf{k} \rho_1 - i \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0 \\
 \mathbf{E}_1 &= -\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 \\
 k^2 \mathbf{E}_1 - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1) &= -i \omega \mu_0 \mathbf{j}_1
 \end{aligned} \right\} [2.1.4]$$

消去 $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{j}_1$ 和 ρ_1 得到

$$\begin{aligned}
 \omega^2 \mathbf{u} &= (k^2 / \mu_0 \rho_0) \{ [\mathbf{B}_0 \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0)] - (1/k^2) (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{k}) (\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0)) \} \\
 &\quad + c_s^2 \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1)
 \end{aligned} [2.1.5a]$$

$$[\nu_p^2 - \mathbf{B}_0^2 / (\mu_0 \rho_0)] \mathbf{u}_1 = -(1 / \mu_0 \rho_0) \{ \mathbf{B}_0 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{u}_1) + (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{k} / k) [\mathbf{u}_1 \cdot (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{k} / k)] \} + c_s^2 \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1) / k^2 \quad [2.1.5b]$$

这里 $\nu_p = \omega / k$ 为波的相速度。

取笛卡尔坐标系，使 x 轴垂直于波矢 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{B}_0$ 组成的平面内，并垂直于 $\mathbf{B}_0$ 方向， z 轴就在 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{B}_0$ 组成的平面内，并垂直于 $\mathbf{B}_0$ 如图 2.1.1。现将方程[2.1.5]写成在这些坐标轴上的投影。

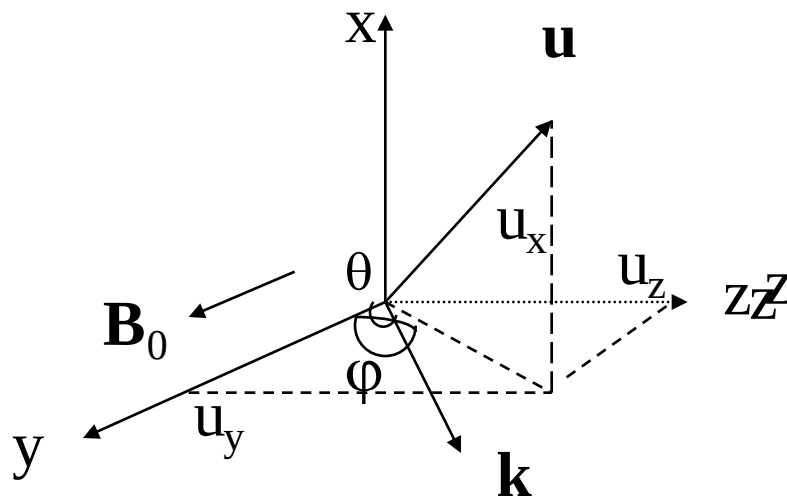


图2.1.1

在x轴上的投影给出

$$v_{pA}^2 = \omega^2 / k^2 = v_A^2 \cos^2 \theta \quad [2.1.6]$$

$$\text{这里 } v_A = (B_0^2 / \rho_0)^{1/2} \quad [2.1.7]$$

称为阿尔芬 (Alfven) 速度, θ 是 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{B}_0$ 之间的夹角。

方程[2.1.5]在y和z轴上的投影给出

$$\begin{aligned} v_p^2 \cos \varphi &= c_s^2 \cos \theta \cos(\varphi - \theta) \\ v_p^2 \sin \varphi &= v_A^2 \sin \varphi + c_s^2 \sin \theta \cos(\varphi - \theta) \end{aligned}$$

这里 φ 是 $\mathbf{u}$ 在y和z平面上的投影和 $\mathbf{B}_0$ 之间的夹角, 消去 φ 得到 v_p 的另外两个解

$$v_p^2 \pm = (c_s^2 + v_A^2 / 2) \{ 1 \pm [1 - 4v_A^2 c_s^2 \cos^2 \theta / (c_s^2 + v_A^2)^2]^{1/2} \} \quad [2.1.8]$$

*练习作业: 由[2.1.4]推导出[2.1.5a]和[2.1.5b], 并在图2.1.1的坐标条件下推导出[2.1.8]。

由此可见，在磁场中的导电流体中传播的平面波有三种模式。由[2.1.6]式确定的模式与声速无关，其速度矢量垂直于波的传播矢量($\mathbf{u}_x \perp \mathbf{k}$)。所以是横波，称作斜阿耳文波。由[2.1.8]式确定的另外两个模式，均涉及磁压强和等离子体热压强，一般情况下它们既不是纯纵波，也不是纯横波。当

$$v_A c_s \cos \theta / (c_s^2 + v_A^2) \ll 1$$

时，当 $\cos \theta \ll 1$ 或 $c_s \ll v_A$ 或 $v_A \ll c_s$ ，由[2.5.6]结合泰勒展开 $[1 \pm (1-x)^{1/2} = 1 \pm (1-1/2x)]$ 得到

$$V_{p+}^2 \approx c_s^2 + v_A^2 \quad [2.1.9a]$$

$$\text{和 } V_{p-}^2 \approx [c_s^2 v_A^2 / (c_s^2 + v_A^2)] \cos \theta \quad [2.1.9b]$$

相速度 v_{p+} 远大于 v_{p-} ，因而分别称为快波和慢波。同时[2.1.6]式给出的相速度，介于 v_{p+} 和 v_{p-} 之间、所以通常把由[2.1.9a]，[2.1.6]和[2.1.9b]三个式子所表示的三个模式分别称为快，中间和慢模式，并把它们统称为磁流体力学波。

它们的相速度曲面如下图所示。

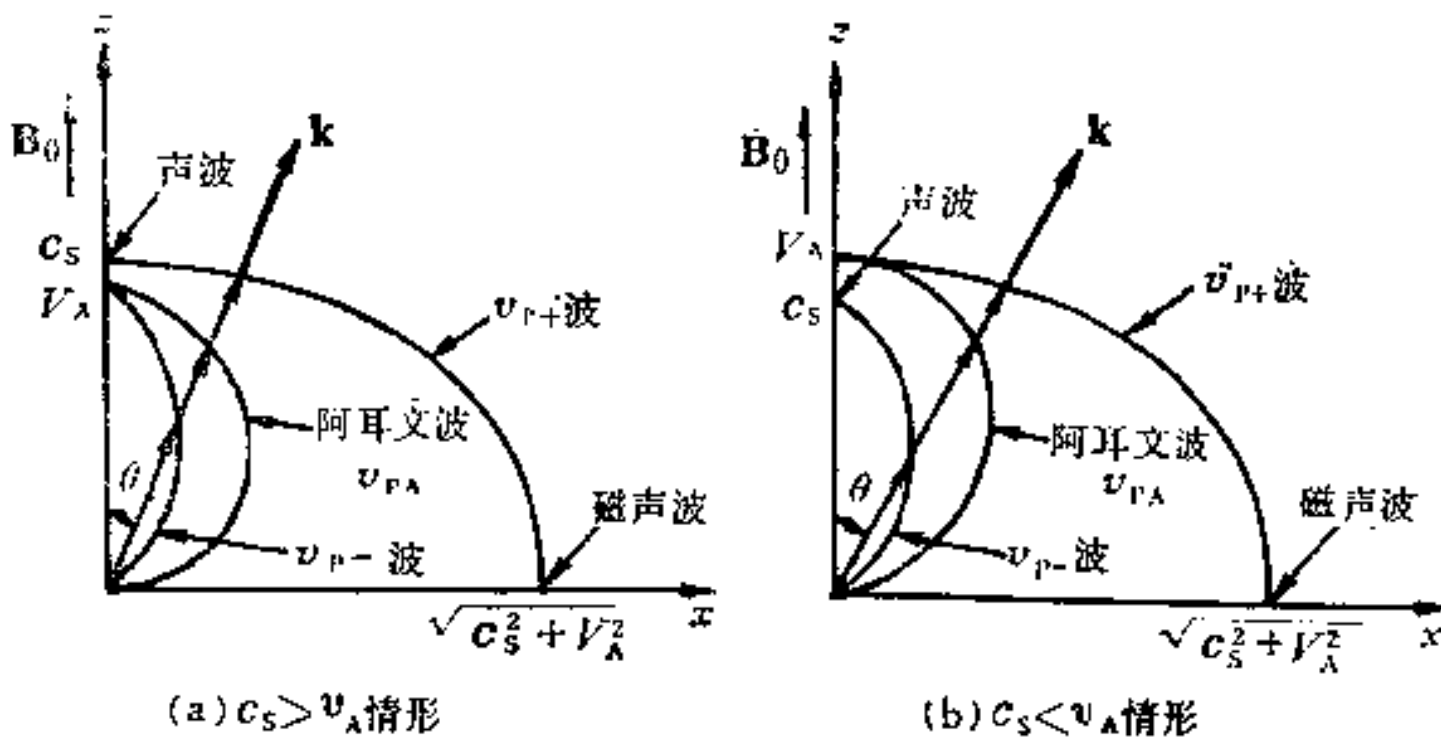


图2.1.2 磁流体力学波的相速度与 θ 的关系

下面究某些特殊情形。先讨论平行于磁场方向传播的波。
当 $\theta = 0$ 时，由得到两个以速度

$$v_{pA}^2 = v_{p+}^2 = v_A^2 \quad [2.1.10]$$

传播的横波($\mathbf{k} \perp \mathbf{u}$)和一个以声速

$$v_{p-}^2 = c_s^2 \quad [2.1.11]$$

传播的纵波($\mathbf{k} // \mathbf{u}$)，前一种通常称为 **阿尔芬波**。

当 $\theta = \pi/2$ 时，即沿着垂直于磁场方向传播的情形，我们有

$$v_{pA}^2 = v_{p-}^2 = 0$$

$$v_{p+}^2 = (c_s^2 + v_A^2)^{1/2} = v_M \quad [2.1.12]$$

从上方程可以看到垂直于磁场方向只有纵波是能够传播的，这个波称为**磁声波**。可以认定 v_M 是磁声波波速。当 $\mathbf{B}_0 \rightarrow 0$ 时，它转变成寻常的声波。在有磁场的情况下，纵波的速度大于声波。这是由于磁场使等离子体在垂直于磁场方向具有附加的弹性。

在阿尔芬波和磁声波中的扰动磁场可从方程[2.1.1]第三式和第五式得到

$$\partial \mathbf{B}_1 / \partial t = \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) \quad \text{或者可变化为:}$$

$$\mathbf{B}_1 = u_1 \mathbf{B}_0 k / \omega$$

$$\text{对于} \quad k \perp \mathbf{B}_0$$

$$\mathbf{B}_1 = 0$$

$$\text{对于} \quad \text{纵波} \quad k // \mathbf{B}_0$$

$$\mathbf{B}_1 = -\mathbf{u}_1 B_{0k} k / \omega$$

$$\text{对于} \quad \text{横波} \quad k // \mathbf{B}_0$$

(这里横波和纵波指 $-\mathbf{u}_1$ 和 $\mathbf{k}$ 的相对方向)

垂直于磁场方向传播的磁声波，引起磁力线的疏密变化，因而除了压缩引起的热压力恢复力外，还引起磁压强恢复，如图2.1.3.(a)。另外，平行于 $\mathbf{B}_0$ 方向传播的阿耳文波，则引起磁力线的横向振荡，如图2.1.3(b)。

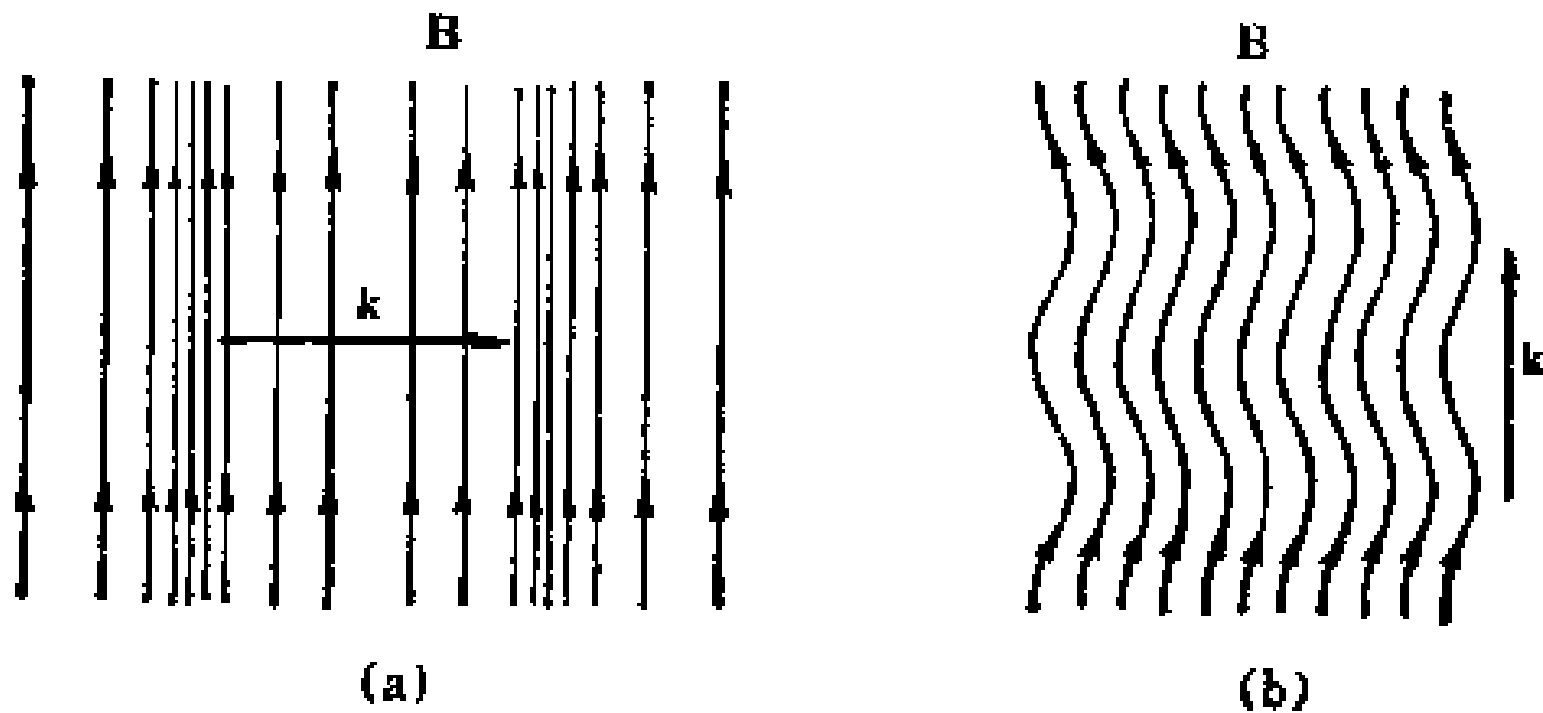


图2.1.3 磁流体力学波

阿尔芬波类似于弹性介质中传播的横波。磁场作用于导电流体上的力等效于静磁压强 $B^2_0/2\mu_0$ 和沿磁力线方向的张力 B^2_0/μ_0 ，平均每条磁力线上的张力是 $B^2/\mu_0/B=B/\mu_0$ (因单位横截面有 B 根磁力线穿过)。当流体的电导率很大时，由于冻结效应，流体质点相对于其平衡位置有位移时，引起磁力线的弯曲。在磁力线弯曲处形成的张力，将引起垂直于磁力线方向的恢复力，它给磁力线以刚性，趋向产生流体相对于其平衡位置的振荡。因每根磁力线单位长度的“质量”为 ρ/B ，故沿磁力线这个“准弹性绳”传播的横振荡的速度是

$$V_A=(B/\mu_0)^{1/2}/(\rho/B)^{1/2}=(B^2/\mu_0\rho)^{1/2}$$

此即阿耳文速度。。

如果流体的电导率并非无限大并且存在粘滞效应，就会产生耗散损失和振荡的阻尼。这时流体运动方程和感应方程是

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 \partial \mathbf{u}_1 / \partial t &= -c_s^2 \nabla \rho_1 - \mathbf{B}_0 \times (\nabla \times \mathbf{B}_1) / \mu_0 + \eta \nabla^2 \mathbf{u}_1 \\ \partial \mathbf{B}_1 / \partial t &= \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) + v_m \nabla^2 \mathbf{B}_1 \quad v_m = 1 / (\sigma \mu_0) \end{aligned} \right\} \quad [2.1.13]$$

为使计算简化，运动方程中略去了第二粘滞系数。对于平面波解，方程[2.1.13]等效于

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 \partial \mathbf{u}_1 / \partial t &= [-c_s^2 \nabla \rho_1 - \mathbf{B}_0 \times (\nabla \times \mathbf{B}_1) / \mu_0] / (1 + i v k^2 / \omega) \\ \partial \mathbf{B}_1 / \partial t &= \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) / (1 + i v_m k^2 / \omega) \end{aligned} \right\} \quad [2.1.14]$$

其中 $v = \eta / \rho_0$ 。将[2.1.14]第一式两边对 t 微分，并把第二式代进去，可得

$$\begin{aligned}
 (1+iv_m k^2/\omega)/(1+iv k^2/\omega) \omega^2 \mathbf{u}_1 = & k^2 /(\rho_0 \mu_0) \{ [\mathbf{B}_0 \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_1)] - \\
 & - (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{k}) [\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0)] \} \\
 & + (1+iv_m k^2/\omega) c_s^2 \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1)
 \end{aligned}
 \tag{2.1.15}$$

由此可见，只要在联系 k 和 ω 的色散方程[2.1.6a]中将 ω^2 乘上因子 $(1+iv_m k^2/\omega)/(1+iv k^2/\omega)$ ，而将 c_s^2 乘上因子 $(1+iv_m k^2/\omega)$ 就可以得到考虑有限电导率的和粘滞性情况下的色散方程。

对于沿磁场方向传播的阿尔芬波情形，[2.1.15]式边为变为

$$k^2 v_A^2 = \omega^2 (1+iv_m k^2/\omega)/(1+iv k^2/\omega) \tag{2.1.16}$$

若电阻和粘滞校正项很小，则波数近似等于

$$k = \omega / v_A + i\omega^2 v_A^{-3} (v_m + v) \tag{2.1.17}$$

[2.1.16]式中的虚数项决定波的衰减。可以看出，衰减随频率(或波数)增加而迅速增加，随磁场强度增加减少。

*练习作业：由[2.1.13]推导出[2.1.14]和[2.1.15]。

2.2 色散关系(一般形式)

对于线性波而言，可以将磁流体力学方程组线性归并成麦克斯韦方程组，其中介电张量用连续性方程、动量方程和状态方程获得，电荷密度和电流密度可以表示为含有介电张量系数的电场的线性函数。这是用磁流体动力学求解等离子体波的整体思路。

如上节所述，考虑小幅度波，物理量 q 相对其平衡位置 q_0 的偏离不大，即 $q=q_0+q_1$ ， $|q_1| \ll |q_0|$ 。磁流体力学方程组可以线性化。如果等离子体是均匀的($\nabla q_0=0$)。这些方程是有常系数的方程。可以用一般的方法(例如傅立叶方法)求解，即将扰动量 $q_1(\mathbf{r}, t)$ 展开成空间和时间的傅立叶级数或积分。将方程解写成平面波的形式

$$q_1 = q_1(\mathbf{k}, \omega) e^{(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad [2.2.1]$$

如果没有外加场源，线性化方程是齐次的，就得到以扰动量 $q_1(\mathbf{k}, \omega)$ 为代数的线性齐次代数方程组。扰动量 $q_1(\mathbf{k}, \omega)$ 不为零的条件是这个线性齐次代数方程组的系数行列式为零。系数行列式为零的表达式称为**色散关系**。色散关系联系波的频率和波矢之间的关系。一般情况下它们都是复数：

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega_r(\mathbf{k}) + i\gamma(\mathbf{k}) \quad [2.2.2]$$

$$k(\omega) = k_r(\omega) + i k_i(\omega) \quad [2.2.3]$$

对于给定的实数传播 k 系数，函数 $\omega(k)$ 确定等离子体的本征振荡特性。从 $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_r t) + \gamma t]$ 可知， ω 的实部确定本征振荡频率，而虚部确定振荡的阻尼率或增长率，视 γ 的符号而定。

对于给定的实数传播频率，函数确定等离子体中以频率传播的波的特性。设引进折射率，它和波数的关系是

$$k = \omega N/c = \omega/c (p + iq) \quad [2.2.4]$$

这里 p 和 q 分别代表折射率实部和虚部。假定波沿在 z 轴传播

($k_x = k_y = 0, k_z = k$)。这时由

$$\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = \exp\{i(\omega/c)[z - (c/p)t] - (\omega/c)qz\}$$

可知，折射率实部的确定波的相速度，而虚部确定波随距离的阻尼率或增长的特性，视 q 的符号而定。

由此可见，等离子体中存在的线性波必须满足色散关系，而色散关系完全确定给定条件下等离子体中可能存在的波的全部特性。这就是色散关系的重要性。因此，研究等离子体波的问题归结为求色散关系。

一般而言，为求色散关系必须将整个磁流体力学方程组求解（如上节在磁流体力学波的求解过程中所看到的那样）。但是，常常很方便的是从运动方程求出电流密度，并且引入介电张量，介电张量是为了描述等离子体的电磁响应特性而引入的一个物理量。将电流密度通过介电张量表示成电场的线性函数并代入麦克斯韦方程组。即可求得色散关系。这方法的实质是将等离子体看成是有介电张量所描述的电介质来处理。

设在时间 t' 等离子体中的 $\mathbf{r}'$ 点附近外加了电场 $\mathbf{E}(\mathbf{r}', t')$ ，等离子体会感生出电流。设在时间 t ，空间坐标 $\mathbf{r}$ 附近测定的感生电流密度为 $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ ，它可以看作是等离子体对扰动的响应，那么一般说来， $\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{E}$ 的关系的关系可以写成

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \quad [2.2.5]$$

这里 $\boldsymbol{\sigma}$ 是描述等离子体对电场的响应特性的量，它的张量性质来源于等离子体具有的各向异性，在 $t < t'$ 时

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = 0 \quad [2.2.6]$$

如果所加的扰动是小幅度的，则我们可以假定 $\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{E}$ 的关系是线性的，这时算子 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t')$ 就具有电导率张量的意义，通常的欧姆定律是上式的一个特例，对应于

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \sigma I \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad [2.2.7]$$

其中 σ 为常数，

线性响应的一个特征是满足**叠加原理**。因此对于随时间和空间变化的电场和电流可以写成

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^t dt' \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') \quad [2.2.8]$$

这里空间积分遍及等离子体介质的整个体积。

除了线性响应外，如果进一步假定介质是**均匀**而且是**静止**的，则 σ 将仅仅是相对位置 $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ 和 $t-t'$ 时间的函数，这时 [2.2.8] 可以写成

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' \int_{-\infty}^t dt' \sigma(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t')$$

[2 .2.9]

上面积分表达式直接代入麦克斯韦方程组是很不方便。但通过对时间和空间的傅立叶变换，可以简化形式

利用傅立叶变换中的卷积定律

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$$

其中

$$\left. \begin{matrix} \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) \\ \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \end{matrix} \right\} = \int d\mathbf{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \begin{matrix} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \end{matrix} \right\} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k}, \omega) = \int d\mathbf{r} \int_0^{\infty} dt \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}', t) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

从上看出电流密度是通过电导率张量表示成电场的线性函数，这时等离子体介质的电磁响应特性完全反映在电导率张量中。把电流密度看成是位移电流而包含在电感应矢量的表达式中得到：

$$\mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \partial \mathbf{E} / \partial t = \mu_0 \partial \mathbf{D} / \partial t \quad [2.2.10]$$

引进等离子体介电张量 ε

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \cdot \mathbf{E} \quad [2.2.11]$$

对[2.2.10]和[2.2.11]进行傅立叶变换得到：

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = -i \omega \varepsilon_0 (\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \quad [2.2.12]$$

这里 $\mathbf{I}$ 为单位张量。从上方程看出介电张量完全决定等离子体的线性响应特性。等离子体波的色散关系只依赖于 $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$ 。因此，介电张量完全决定等离子体波的特性。

电导率张量和介电张量的关系为

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{I} - i \omega \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k}, \omega) / \epsilon_0 \quad [2.2.13]$$

方程右边第一项为真空中位移电流的贡献，第二项为极化电流的贡献。 $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$ 和 $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k}, \omega)$ 的具体形式由运动方程确定。

把无外加电荷和电流密度条件下的麦克斯韦方程组写成下列形式：

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + 1/c^2 \partial \mathbf{E} / \partial t = \mu_0 \partial \mathbf{D} / \partial t = \epsilon \cdot \partial \mathbf{E} / \partial t \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [2.2.14]$$

对方程进行傅立叶变换得到

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \mathbf{B} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{B} &= -\omega \mu_0 \mathbf{D} = -\omega / c^2 \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [2.2.15]$$

从上方程组后三个看出 $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{k}$ 互相垂直。但 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{k}$ 一般并不垂直, $\mathbf{E}$ 位于 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{k}$ 组成的平面内和 $\mathbf{B}$ 垂直(见图2.2.1)。从上方程组消去 $\mathbf{B}$ 得到:

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) - (\omega / c^2) \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad [2.2.16]$$

变为

$$[\mathbf{k}\mathbf{k} - k^2 \mathbf{I} + (\omega / c^2) \boldsymbol{\epsilon}] \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad [2.2.17]$$

这个方程具有非平庸解的条件是其系数行列式必须等于零:

$$\text{Det} | [\mathbf{k}\mathbf{k} - k^2 \mathbf{I} + (\omega / c^2) \boldsymbol{\epsilon}] | = 0 \quad [2.2.18]$$

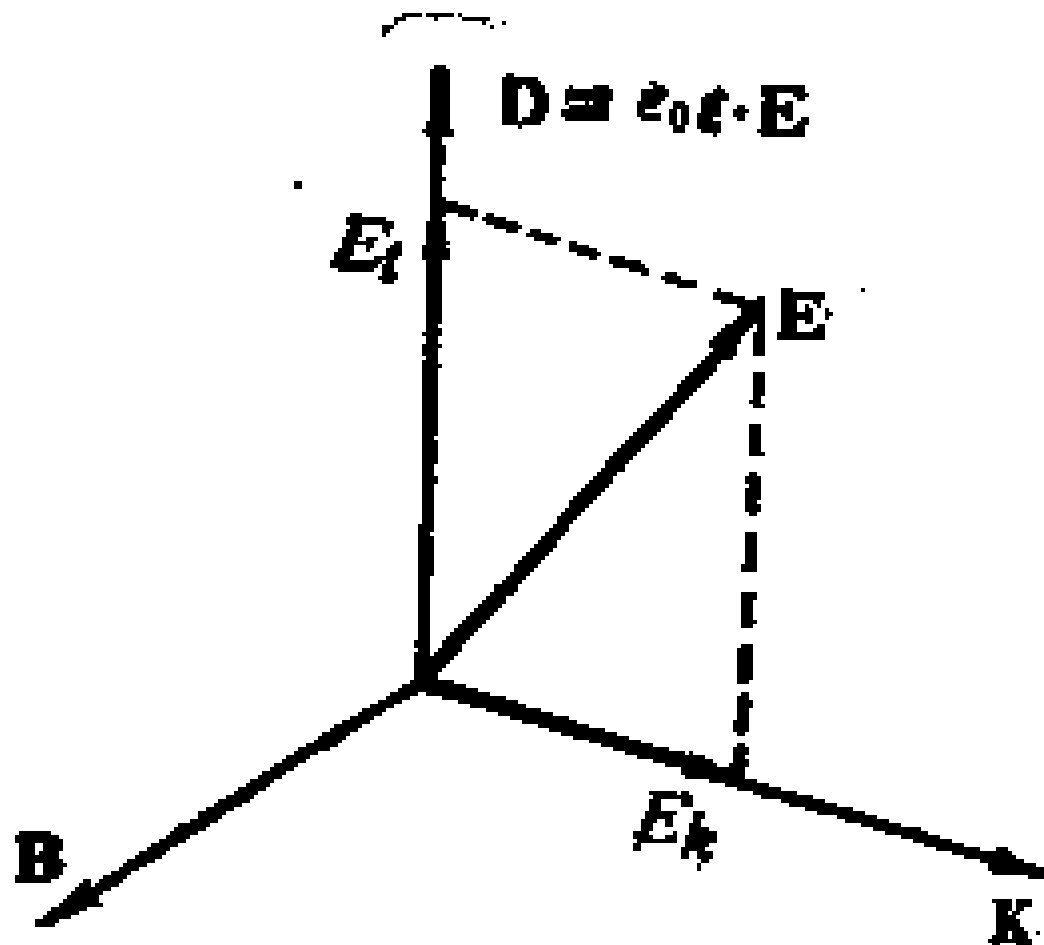


图2.2.1 等离子体平面波的传播

这个关系式确定等离子体中电磁波的频率和波数 $\mathbf{k}$ 的关系，即色散关系。色散关系的[2.2.18]的分量形式为：

$$\begin{vmatrix} k_x^2 - k^2 + k_0^2 \varepsilon_{xx} & k_x k_y + k_0^2 \varepsilon_{xy} & k_x k_z + k_0^2 \varepsilon_{xz} \\ k_y k_x + k_0^2 \varepsilon_{yx} & k_y^2 - k^2 + k_0^2 \varepsilon_{yy} & k_y k_z + k_0^2 \varepsilon_{yz} \\ k_z k_x + k_0^2 \varepsilon_{zx} & k_z k_y + k_0^2 \varepsilon_{zy} & k_z^2 - k^2 + k_0^2 \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = 0$$

[2.2.19]

其中， $k_0 \equiv (\omega/c)$, $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$

引入折射率矢量

$$\mathbf{N} = \mathbf{k}c/\omega$$

[2.2.20]

它的方向指向波矢 $\mathbf{k}$ 的方向，大小等于折射率 N ，

$$N = c/v_p = (\omega/v_p)/(\omega/c) = k/k_0$$

[2.2.21]

方程[2.2.17]和[2.2.18]可以写为

$$\Sigma \Lambda_{ij} E_j = 0 \quad [2.2.21\alpha]$$

$$\Lambda = \text{Det} |\Sigma \Lambda_{ij}| = 0 \quad [2.2.21\beta]$$

这里

$$\Lambda_{ij} = N^2 (k_i k_j / k^2 - \delta_{ij}) + \varepsilon_{ij} \quad [2.2.21\gamma]$$

也是一个张量。用量 Λ 来表示是为了以后可以用线性代数来方便表达和求解。

在下面的讨论中设波矢 $\mathbf{k}$ 位于x-z平面内，与z轴的角度 θ （取z轴沿 $\mathbf{B}_0$ 方向）如图2.2.2所示坐标系，在这样的坐标系中，根据[2.2.21 γ]色散关系可以写成

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{xx} - N^2 \cos^2 \theta & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} + N^2 \sin \theta \cos \theta \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} - N^2 & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} + N^2 \sin \theta \cos \theta & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} - N^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = 0 \quad [2.2.22]$$

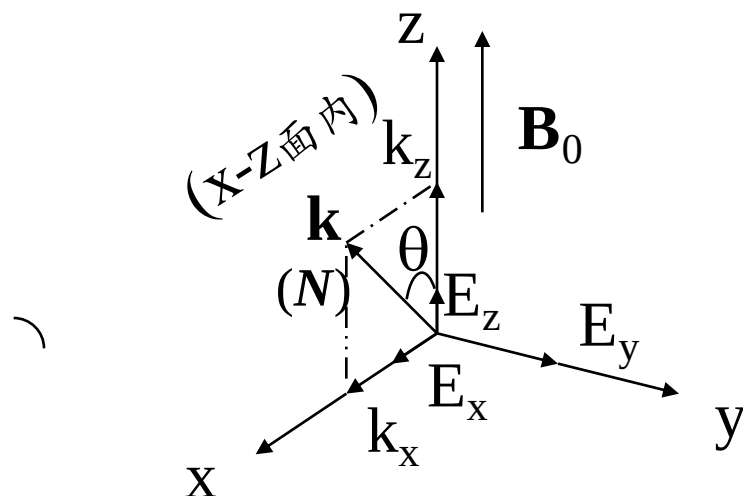


图2.2.2

各向同性等离子体的色散关系

在各向同性等离子体（无磁场）中，考虑的方向只有波的传播方向。介电张量取如下形式，

$$\boldsymbol{\epsilon}(k, \omega) = \epsilon_{\perp}(k, \omega)(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2}) + \epsilon_{//}(k, \omega)\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} \quad [2.2.23]$$

$$\epsilon_{//}(k, \omega) = (1/k^2)[\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{k}] \quad [2.2.24]$$

$$\epsilon_{\perp}(k, \omega) = (1/2)[Tr(\boldsymbol{\epsilon}) - \epsilon_{//}] \quad [2.2.25]$$

这里 $\epsilon_{\perp}$ 和 $\epsilon_{//}$ 是介电张量的横分量和纵分量，已知 $\boldsymbol{\epsilon}$ 可以根据[2.2.24]和[2.2.25]求出 $\epsilon_{\perp}$ 和 $\epsilon_{//}$ 。 $\epsilon_{\perp}$ 表达式中的 Tr 是表示张量的迹（对角元素之和）。

将[2.2.23]代入[2.2.18]可以得到各向同性等离子体的色散关系

$$\det \left| \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} \varepsilon_{//}(k, \omega) + [\varepsilon_{\perp}(k, \omega) - N^2] \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} \right) \right| = 0 \quad [2.2.26]$$

在图14.2.2所示坐标系中的分量形式为

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon_{//} - \varepsilon_{\perp} + N^2) \sin^2 \theta + (\varepsilon_{\perp} - N^2) & 0 & (\varepsilon_{//} - \varepsilon_{\perp} + N^2) \sin \theta \cos \theta \\ 0 & \varepsilon_{\perp} - N^2 & 0 \\ (\varepsilon_{//} - \varepsilon_{\perp}) N^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & (\varepsilon_{//} - \varepsilon_{\perp} + N^2) \cos^2 \theta + (\varepsilon_{\perp} - N^2) \end{vmatrix} = 0. \quad [2.2.27]$$

求解得 $\varepsilon_{//} (\varepsilon_{\perp} - N^2)^2 = 0$, 分解成

$$\varepsilon_{//}(k, \omega) = 0 \quad [2.2.28]$$

$$\varepsilon_{\perp}(k, \omega) = N^2 = (kc/\omega)^2 \quad [2.2.29]$$

它们分别对应于纵波和横波的色散关系，相应的波场也满足

$$\varepsilon_{//} \mathbf{E}_{//} = 0 \quad [2.2.30]$$

$$(N^2 - \varepsilon_{\perp}) \mathbf{E}_{\perp} = 0 \quad [2.2.31]$$

从上可见，各向同性等离子体的中纵波和横波是相互独立的。

2.3 均匀各向同性等离子体中的振荡与波

用流体动力学近似分析等离子体振荡和波在许多情况下是方便的。在另外一些情况下，与动力论相比，流体动力学近似分析又会失去等离子体振荡的一些重要特性，如不能处理粒子热运动引起的效应（如阻尼效应）。但是，如果考虑的对象是冷等离子体（即热运动可以忽略）或高密度等离子体，则流体动力学近似就足够了。但波的相速度与带电粒子的热运动速度相当时或振荡被阻尼时，这种近似就不适用了。

从简单起见，忽略等离子体不同成份之间的摩擦，并假定振荡是绝热的。这种条件下，描述等离子体每种成份的流体动力学方程是

$$mn \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + en\mathbf{E} \quad [2.3.1]$$

$$\frac{dn}{dt} + n\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad [2.3.2]$$

$$\frac{d}{dt}(pn^{-\gamma}) = 0, p = nT \quad [2.3.3]$$

设 $E_0=u_0=0$ ， $p=p_0+p_1$ ， $n=n_0+n_1$ 。认为物理解为偏离平衡态的小扰动平面解 $\exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ ，对上方程组进行线性化处理。得到

$$-i\omega p_1 = -\gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = -i\gamma (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) p_0 \quad [2.3.4]$$

由此可见，压强梯度只有沿波的传播方向才不为零。设波沿着z轴传播，从运动方程得到

$$-i\omega u_{1\perp} = e/m E_{\perp} \quad [2.3.5]$$

$$-i\omega u_z = -i\gamma k^2 T/(\omega m) u_z + e/m E_z \quad [2.3.6]$$

认为电流密度是由所有带点电粒子的贡献， $\mathbf{j}=\sum e n_0 \mathbf{u}$ （求和号表示对所有种类的粒子相加），这样得到

$$\mathbf{j}_{\perp} = i \sum e^2 n_0 / m \omega \mathbf{E}_{\perp} = \sigma_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} \quad [2.3.7]$$

$$\mathbf{j}_z = i \sum e^2 n_0 \omega / (\omega^2 m - \gamma k^2 T) E_z = \sigma_{//} E_z \quad [2.3.8]$$

根据[2.2.13]得到

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \sum e^2 n_0 / (\varepsilon_0 m \omega^2) \quad [2.3.9]$$

$$\varepsilon_{//} = 1 - \sum e^2 n_0 / (\varepsilon_0 \omega^2 m - \varepsilon_0 \gamma k^2 T) \quad [2.3.10]$$

根据[2.2.28] 和[2.2.29]得到未磁化等离子体的色散关系是

$$N^2 = \varepsilon_{\perp} = 1 - \sum \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m \omega^2} \quad [2.3.11]$$

$$\varepsilon_{//} = 1 - \sum \frac{n_0 e^2}{(m \omega^2 - \gamma k^2 T) \varepsilon_0} = 0 \quad [2.3.12]$$

它们分别代表未磁化等离子体中的横振荡和纵振荡。

由此可以看出这套方法的求解程序是

(1) 利用磁流体方程组求得 $\mathbf{u}$ - $\mathbf{E}$ 关系

(2) 利用 $\mathbf{j} = \Sigma e n_0 \mathbf{u}$ 求的 $\mathbf{j}$ - $\mathbf{E}$ 关系

即 $\mathbf{j}_{\perp} = \sigma_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}$, $j_z = \sigma_{\parallel} E_z$, 定出 σ ($\sigma_{\perp}$, $\sigma_{\parallel}$)

(3) 根据[2.2.13] $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{I} - i \omega \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k}, \omega) / \varepsilon_0$ 得到 ε ($\varepsilon_{\perp}$, $\varepsilon_{\parallel}$)

(4) 利用方程组[2.2.28] 和[2.2.29]

$$\varepsilon_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega) = 0$$

$$\varepsilon_{\perp}(\mathbf{k}, \omega) = N^2 = (kc/\omega)^2$$

求得 N -($\varepsilon_{\perp}$, $\varepsilon_{\parallel}$)关系, 即色散关系 $\omega = \omega(\mathbf{k})$

电磁波

色散关系[2.3.11]描述的是电场矢量垂直于波传播方向的横电磁波。为简单起见，我们只考虑由一种正离子和电子组成的等离子体，并且由于离子质量远大于电子质量的数值比较而忽略离子运动的影响。这时[2.3.11]可以写成：

$$N^2 = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2 - \omega_{pi}^2/\omega^2 \cong 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2 \quad [2.3.13]$$

这里 $\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}}$ [2.3.14]

为等离子体频率或称朗缪尔频率。

当 $\omega \ll \omega_{pe}$ 时折射率为纯虚数，波矢量也是虚数：

$$k = N(\omega/c) = i \omega_{pe}^2/c(1 - \omega^2/\omega_{pe}^2) = i a \quad [2.3.15]$$

这时振荡的空间变化将成为指数型衰减波，如

$$E(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} = E_0 e^{-az - i\omega t} \quad [2.3.16]$$

上式表明，未磁化等离子体中不可能传播振荡频率小于朗缪尔频率的电磁波，称入射波的振幅衰减到原值的 $1/e$ 时的厚度为**反射趋肤深度**，以 δ 表示，从[2.3.15]得知

$$\delta = c / \omega_{pe} (1 - \omega^2 / \omega_{pe}^2)^{-1/2} \quad [2.3.17]$$

从物理上讲，波频率小于朗缪尔频率的电磁波不可能在未磁化等离子体中传播，这是由于极化电流的屏蔽缘故。

在当 $\omega \ll \omega_{pe}$ 时，

比较 极化电流 $j_{\perp} = i\varepsilon_0 \omega_{pe}^2 / \omega E_{\perp}$,

真空位移电流 $j_D = \varepsilon_0 \partial E / \partial t = -i\varepsilon_0 \omega E_{\perp}$

的大小并和 $N^2 = 1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2$ 的正负结果相联系。

等离子体中产生的这种屏蔽效应与通常的场被感应电流屏蔽类似。但又有所不同，这里没有能量耗散，即吸收和能通量都为零，入射波完全被等离子体发射。

电磁波被等离子体全反射的性质与电磁波被电介质反射的性质相似。在介质中，当波的入射角大于布儒斯特角时，发生全反射(见图2.3.1)，布儒斯特角由公式

$$\tan \theta_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

所决定。

若现在 ε_2 以对应于真空而以 ε_1 对应于等离子体，则

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \varepsilon_2 = 1$$

要使得任意入射角 θ 的电磁波均发生全反射，必须 $\theta_B=0$ ，也即 $\varepsilon_1=0$ 。由此可见，当 $\omega \ll \omega_{pe}$ 时入射电磁波发生全反射。

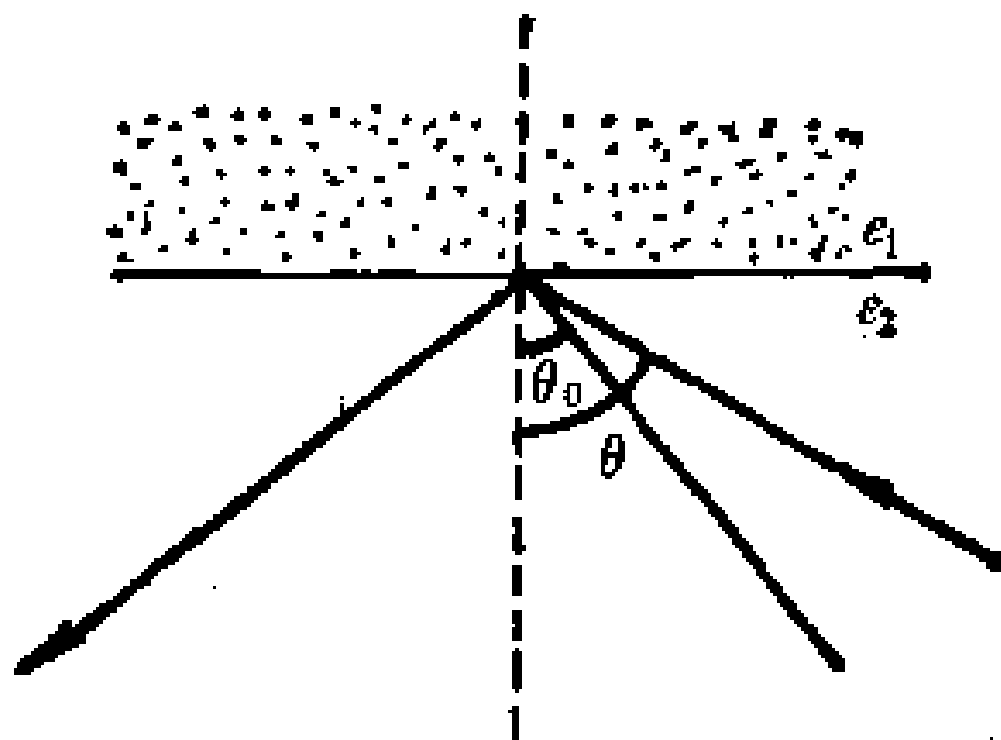


图2.3.1

当 $\omega = \omega_{pe}$ 而 $N^2 = 0$ 时入射电磁波发生全反射的现象称为**截止**，相应的频率称为**截止频率**。

未磁化等离子体的截止频率即等于朗缪尔频率：

$$\omega_c = \omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}} \cong 5.64 \times 10 \sqrt{n_e} [\text{弧度/秒}]; n_e [\text{米}^{-3}] \quad [2.3.18]$$

或者对于给定频率的电磁波，临界密度为

$$n_c = \frac{\epsilon_0 m_e \omega_c^2}{e^2} \cong 1.2 \times 10^{-2} f_c^2 [\text{米}^{-3}]; f [\text{秒}^{-1}] \quad [2.3.19]$$

当折射率 N 为实数($0 < N < 1$)时，这种电磁波能在等离子体中传播。从色散方程知道电磁波的频率和波数的关系是

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2 \quad [2.3.20]$$

由此得到电磁波的相速度和群速度为：

$$v_p = \omega/k = c(1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2)^{-1/2} \quad [2.3.21]$$

$$v_g = \partial\omega / \partial k = c\sqrt{1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2} = c^2 / v_p \quad [2.3.22]$$

因为 $\omega > \omega_{pe}$ ，所以未磁化等离子体中传播的电磁波的相速度总是大于光速，而群速度总是小于光速（见图2.3.2）。

这种等离子体波动特性被用于利用微波透射法和微波干涉来诊断等离子体密度。

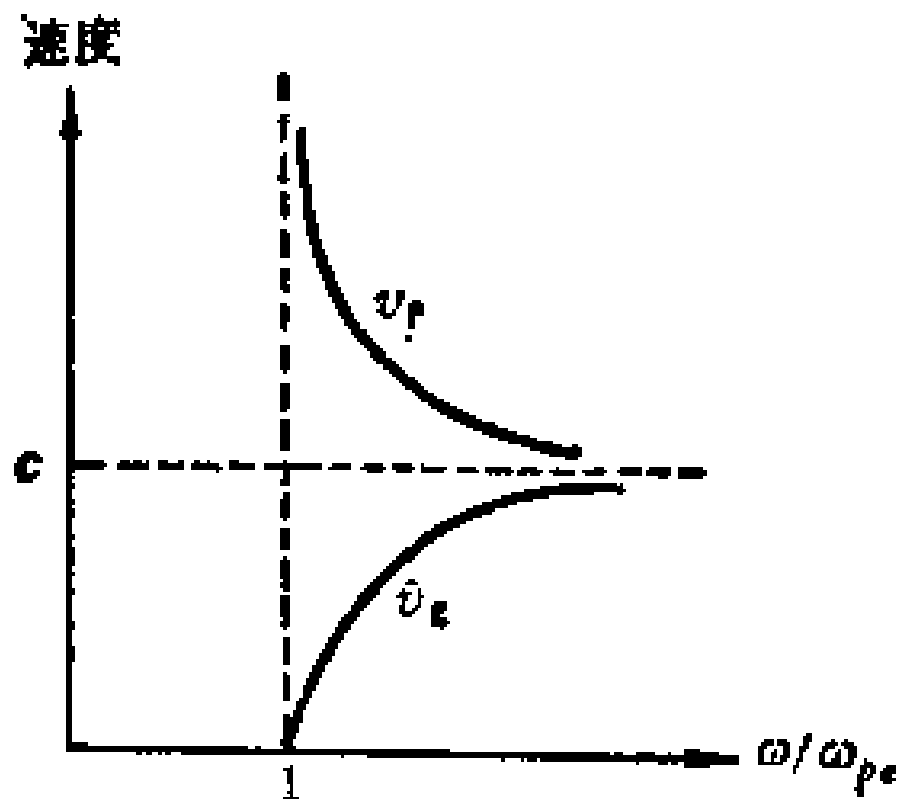


图2.3.2 各向同性等离子体传播的电磁波的群速度和相速度与频率的关系

静电波

色散关系[2.3.12]描述的是电场矢量平行于波传播方向的纵振荡。为简单起见，我们仍只考虑由一种正离子和电子组成的等离子体，这时[2.3.12]可以写成：

$$\varepsilon_{//} = 1 - \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 (m_e \omega^2 - \gamma_e k^2 T_e)} - \frac{n_i e^2}{\varepsilon_0 (m_i \omega^2 - \gamma_i k^2 T_i)} = 0 \quad [2.3.23]$$

在冷等离子体的情况下($T=p=0$ 或 $\sqrt{\frac{T}{m_e}} \ll v_p$), 上方程变为

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 = \left(1 + \frac{m_e}{m_i}\right) \omega_{pe}^2 = \omega_p^2 \cong \omega_{pe}^2 \quad [2.3.24]$$

其中 $\omega_{pe} = e^2 n_e / (\varepsilon_0 m_e)$, $\omega_{pi} = e^2 n_i / (\varepsilon_0 m_i)$ 。这是频率等于 $\omega_p \approx \omega_{pe}$ 的静电振荡，称为朗缪尔振荡。没有 k 只是振荡。

在 $T \neq 0$ 的等离子体中，色散关系表明静电振荡是色散的，即在热等离子体中静电振荡能够传播，成为**静电波**（或**空间电荷波**）。这是因为在热等离子体中，除了静电恢复力外，还有热压强梯度起着恢复力的作用。

$$\text{引进记号 } \alpha_e^2 = \gamma_e T_e / (c^2 m_e) \quad , \quad \alpha_i^2 = \gamma_i T_i / (c^2 m_i) \quad [2.3.25]$$

色散关系[2.3.23]变为

$$N^4 - [(1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2) / \alpha_e^2 + (1 - \omega_{pi}^2 / \omega^2) / \alpha_i^2] N^2 + [1 - (\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2) / \omega^2] / (\alpha_e^2 \alpha_i^2) = 0 \quad [2.3.26]$$

这个方程的解如图2.3.3所表示的实线，静电波有两种模式，分别为**电子静电波**和**离子静电波**

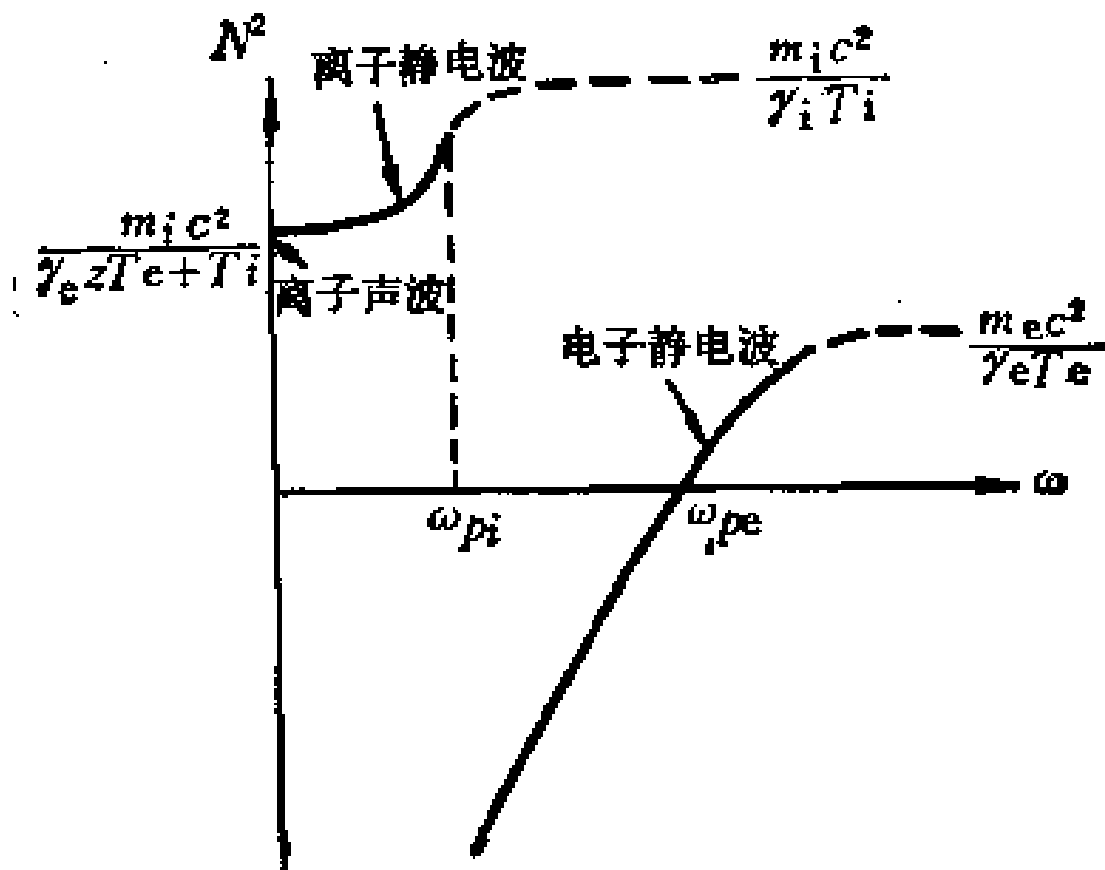


图2.3.3 静电波的色散关系(虚线表示存在强烈的朗道阻尼, 在这个曲线段磁流体力学近似不适用)

电子静电波

在高频 ($\omega^2 \gg \gamma_i k^2 T_i / m_i$, $\gamma_e k^2 T_e / m_e$) 条件下, 方程[2.3.23]中与离子振荡有关的第三项可以忽略。这时方程[2.3.23]化为

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \gamma_e k^2 T_e / m_e \quad [2.3.27]$$

或写成

$$N^2 = (1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2) / \alpha_e^2 \quad [2.3.28]$$

方程的右边第一项来自电荷分离引起的准弹性力, 而第二项来自电子气体的流体动力学压强, 而正是由于这个第二项使静电振荡具有了色散性质, 并以群速度

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\gamma_e T_e}{m_e} \frac{k}{\sqrt{\omega_{pe}^2 + k^2 \gamma_e T_e / m_e}} \quad [2.3.29]$$

传播。

当 $\omega \ll \omega_{pe}$ 时，由方程[2.3.28]知道折射率为纯虚数，加在等离子体上的场将成指数型衰减。反射趋肤深度为德拜长度的量级。

方程[2.3.27]可以写成

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 (1 + \gamma_e k^2 / \lambda_{De}^2) \quad [2.3.30]$$

其中($\lambda_{De} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 T_e}{n_e e^2}}$ 为德拜长度)。只要频率 ω 增大到接近 ω_{pe} 的大约1.5 倍 (γ_e 一般取5/3或3)，就会进入与得拜长度相比较的短波区 ($k^2 \geq \lambda_{De}^2$)。在这个区域的相速度和电子的热运动速度为同数量级，以后的动力论会讨论到这时波会强烈阻尼。由此可见，电子静电波只有在 $\omega \geq \omega_{pe}$ 很狭窄频率范围内才能传播。

离子静电波 离子声波

色散关系[2.3.26]的另一个分支是离子静电波。由于离子质量远大于电子质量，离子静电波是低频波。在方程中[2.3.23]略去与电子惯性 $m_e \omega^2$ 有关的项，得到

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \gamma_i \frac{k^2 T_i}{m_i} + \gamma_e \frac{k^2 T_e}{(1 + \frac{\epsilon_0 \gamma_e k^2 T_e}{n_e e^2}) m_i} \\ &= \gamma_i \frac{k^2 T_i}{m_i} + \frac{\gamma_e k^2 T_e / m_i}{1 + \gamma_e k^2 \lambda_{De}^2}\end{aligned}\quad [2.3.31]$$

这就是离子静电波的色散关系。

在波长远小于得拜长度($k^2 \lambda_{De}^2 \gg 1$)的低频短波区域，色散关系变成类似与电子静电波的色散关系：

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 + \gamma_i k^2 T_i / m_i \quad [2.3.32]$$

这表明，在热等离子体中存在着离子静电振荡，并且像电子静电振荡一样由于热压强的作用而形成离子静电波。形成离子静电波与电子静电波的起因是有区别的。电子静电波是高频波，离子由于质量大来不及响应，因而只是电子在离子的正电荷背景中做高频振荡，并通过热压强的作用而传播。对于低频短波区域离子静电波，则主要是由于波长短时电子的运动被电子的热压强梯度所阻碍（忽略电子惯性项时电子的运动方程变为 $en_0\mathbf{E} + \nabla p = 0$ ），似的使得电子对于离子运动引起的电场屏蔽作用不完全，因而产生离子的电荷分离，引起离子的静电振荡，并由于热压强的作用而传播。

在低频长波 ($k^2 \lambda_{De}^2 \ll 1$) 区域色散关系[2.3.31]变成

$$\omega^2 = k^2 \frac{\gamma_i T_i + \gamma_e T_e}{m_i} \quad [2.3.33]$$

这是声波的色散关系，称为离子声波。

当波长远大于得拜长度时，热压强的对电子屏蔽作用很小，因而电子和离子分离很小，可以认为它们基本上粘合在一起运动。所以，离子声波的特性与中性气体中的声波相似。只是现在离子的恢复力除热压强外还有离子和电子之间微小电荷分离引起的静电力。在忽略电子惯性项的情况下，这个静电力等于电子的热压强梯度。

从动理论知道当波的相速度接近于粒子热速度时，波将强烈阻尼。因此离子声波只有在 $(\omega^2 \gg \gamma_i k^2 T_i / m_i)$ 时才能无阻尼地传播。由[2.3.33]知道这只有在电子的热压强远大于离子的热压强 $(Z T_e \gg T_i)$ 时才能实现。由此可见在等离子体中当 $T_i \rightarrow 0$ 时仍然存在离子声波，其速度

$$c_s = \sqrt{\gamma_e k^2 T_e / m_i} \quad [2.3.34]$$

确定于电子温度和离子质量。在中性气体中是不会出现这种情况的。

2.4. 磁场中“冷”等离子体的介电张量 色散关系

当考虑存在磁场时，等离子体波动的特性会更加复杂化。以下讨论只限于讨论“冷”等离子体的情形，即电子的热压强和离子的热压强都为零。这时扰动不会由于粒子的热运动而传播。现考虑一个外磁场 $\mathbf{B}_0$ 是处于静止的均匀无界的等离子体。这时流体动力学方程为

$$\left. \begin{aligned} m_{\alpha} \frac{d\mathbf{u}_{\alpha}}{dt} &= q_{\alpha} \{ \mathbf{E} + [\mathbf{u}_{\alpha} \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B})] \} \\ \frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [2.4.1]$$

其中 $\alpha = e, i$, 分别代表电子和离子成份。电流密度和电荷密度可表示为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{j} &= \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \\ \rho &= \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad [2.4.2]。$$

假定平衡状态， $n_i = n_e = n_0$ ， $\mathbf{u}_0 = \mathbf{B}_0 = \mathbf{E}_0 = 0$ 。则方程线性化后变为

$$\left. \begin{aligned} -i\omega \mathbf{u}_\alpha - q_\alpha/m_\alpha [\mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}_0] &= q_\alpha \mathbf{E}/m_\alpha \\ n'_\alpha &= n_0 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_\alpha) / \omega \end{aligned} \right\} \quad [2.4.3]$$

其中 $n'_\alpha = n_\alpha - n_0$ 为粒子的扰动密度。所有扰动量为平面波形式，设z轴为 $\mathbf{B}_0$ 方向，则由式[2.4.3]得到

$$-\begin{pmatrix} i\omega & \omega_{c\alpha} & 0 \\ -\omega_{c\alpha} & i\omega & 0 \\ 0 & 0 & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\alpha x} \\ u_{\alpha y} \\ u_{\alpha z} \end{pmatrix} = q_\alpha/m_\alpha \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad [2.4.4]$$

这里

$$\omega_{c\alpha} = q_\alpha B_0 / m_\alpha \quad [2.4.5]$$

为 α 种离子的回旋频率(对于离子 $\omega_{c\alpha} = \omega_{ci} > 0$ ，对于电子 $\omega_{c\alpha} = -\omega_{ce}$ ， $\omega_{ce} > 0$)。由方程组[2.4.4]又可变为如下形式：

$$\begin{pmatrix} u_{\alpha x} \\ u_{\alpha y} \\ u_{\alpha z} \end{pmatrix} = -q_{\alpha}/m_{\alpha} \begin{pmatrix} \omega^2/(\omega_{c\alpha}^2 - \omega^2) & i\omega\omega_{c\alpha}/(\omega_{c\alpha}^2 - \omega^2) & 0 \\ -i\omega\omega_{c\alpha}/(\omega_{c\alpha}^2 - \omega^2) & \omega^2/(\omega_{c\alpha}^2 - \omega^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad [2.4.6]$$

把上式带入电流表达式 $\mathbf{j} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}$ 并[2.2.12]与比较可得到磁场中“冷”等离子体的介电张量为

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{I} - \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha} q_{\alpha}^2}{\epsilon_0 m_{\alpha} \omega^2} \begin{bmatrix} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2} & \frac{i\omega\omega_{c\alpha}}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2} & 0 \\ -\frac{i\omega\omega_{c\alpha}}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2} & \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [2.4.7]$$

引进如下符号:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2} \\ \varepsilon_2 &= - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 \omega_{c\alpha}}{\omega(\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2)} \\ \varepsilon_3 &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \\ \omega_{p\alpha}^2 &\equiv \frac{n_{\alpha} q_{\alpha}^2}{\varepsilon_0 m_{\alpha}}, \omega_{c\alpha} \equiv \frac{q_{\alpha} B_0}{m_{\alpha}} \end{aligned} \right\} \quad [2.4.8]$$

介电张量可以写成如下形式

$$\mathbf{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad [2.4.9]$$

当 $\mathbf{B}_0=0$ 等离子体为各向同性的，这时张量 ϵ 退化为标量

$$\epsilon = \epsilon_3 \mathbf{I} \quad [2.4.10]$$

色散关系

仍然假定 $\mathbf{k}$ 位于(x-z)平面内，由[2.4.9]和[2.2.22]得到

$$\Sigma \Lambda_{ij} E_j = \begin{pmatrix} \epsilon_1 - N^2 \cos^2 \theta & i \epsilon_2 & N^2 \cos \theta \sin \theta \\ -i \epsilon_2 & \epsilon_1 - N^2 & 0 \\ N^2 \cos \theta \sin \theta & 0 & \epsilon_1 - N^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad [2.4.11]$$

由线性代数知道当 $\Lambda = \text{Det}[\Sigma \Lambda_{ij}] = 0$ 时，可求得色散关系为

$$\Lambda = AN^4 + BN^2 + C = 0 \quad [2.4.12]$$

这里

$$\begin{aligned} A &= \epsilon_1 \sin^2 \theta + \epsilon_3 \cos^2 \theta \\ B &= -\epsilon_1 \epsilon_3 (1 + \cos^2 \theta) - (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2) \sin^2 \theta \\ C &= \epsilon_3 (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2) \end{aligned} \quad [2.4.13]$$

[2.4.12]的解是

$$N^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad [2.4.14]$$

上方程表明，在磁化“冷”等离子体中，对应每一个给定的频率（系数 A, B, C 只是频率 ω 的函数），有两种折射率不同的电磁波传播。

若波矢确定，则可以由色散方程求本征频率。方程是 ω^2 的五次方程，因此有十个本征频率，正负两两对应。为简单起见，只考虑正本征频率，就有五个振荡分支。在特殊情况下可以求解。

另外，当对 θ 求解后，方程[2.4.12]也可变为

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-\varepsilon_3[N^2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)][N^2 - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)]}{[\varepsilon_1 N^2 - (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)](N^2 - \varepsilon_3)} \quad [2.4.15]$$

由此可以看出这套方法的求解程序是

(1) 利用磁流体方程组求得 $\mathbf{u}$ - $\mathbf{E}$ 关系

(2) 利用 $\mathbf{j} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}$ 求的 $\mathbf{j}$ - $\mathbf{E}$ 表达式

(3) 比较 $\mathbf{j}$ - $\mathbf{E}$ 表达式和[2.2.12] $\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = -i \omega \epsilon_0 (\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega) - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ 得到介电张量 $\boldsymbol{\epsilon}$

(4) 利用方程组[2.2.22]

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{xx} - N^2 \cos^2 \theta & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xx} + N^2 \sin \theta \cos \theta \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} - N^2 & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} + N^2 \sin \theta \cos \theta & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} - N^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = 0$$

(起源于[2.2.16] 和[2.2.17])

求得 N -($\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$)关系, 即色散关系 $\omega = \omega(\mathbf{k})$

2.5. 截止与共振色散曲线

当等离子体的参数取某些值，或对于一定参数的等离子体，波频率 ω 变化时，出现

$$N^2=0 \quad (k^2=0, v_p=\infty)$$

或

$$N^2=\infty \quad (k^2=\infty, v_p=0)$$

时的特殊情形，分别称为**截止与共振**

当波接近截止区域时，波被等离子体反射；

当波接近共振区域时，波被等离子体吸收(见图2.5.1)。



(a)



(b)

图2.5.1 在截止区域和共振区域附近波的传播特性

截止

由[2.4.14]可见当, $C = \varepsilon_3(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) = 0$, 也即

$$\left. \begin{array}{l} 1) \varepsilon_3 = 0 \\ 2) \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 = 0 \end{array} \right\} \quad [2.5.1]$$

时出现截止。由[2.4.8]可知[2.5.1]第一个条件给出

$$\omega = \omega_0^{(1)} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2} \equiv \omega_p \quad [2.5.2]$$

这里脚标 0 表示 $\omega_0^{(j)}$ 对应于 $k \rightarrow 0$ 的本征频率。 $\omega_0^{(j)} = \lim_{k \rightarrow 0} \omega_0^{(j)}(k, \theta)$ 。第二个条件给出

$$\omega = \omega_0^{(2)(3)} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 + \frac{(\omega_{ce} + \omega_{ci})^2}{4}} \mp \frac{\omega_{ce} - \omega_{ci}}{2} \quad [2.5.3]$$

[]

从物理角度来看，条件 $\varepsilon_3=0$ 相应于位移电流和极化电流的纵向分量(沿 $\mathbf{B}_0$ 方向分量)相互抵消；条件 $\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2=0$ 相应于横向分量相互抵消。

这种波模的截止现象也可以用来做等离子体诊断。

共振

从方程[2.4.14]和[2.4.15]可见，当波的频率接近于满足

$$A=0, \quad \text{tg}^2\theta = -\varepsilon_3 / \varepsilon_1 \quad [2.5.4]$$

条件时，折射率有两个表达式，一是

$$N = -B/A \quad [2.5.5]$$

趋于无穷大。另一个是

$$N = -C/B \quad [2.5.6]$$

为有限值。

用 k_i 乘以 $\sum \Lambda_{ij} E_j = 0$ 并利用公式[2.2.21 α], [2.2.21 β]和[2.2.21 γ], 并由 $i=1$ 到3相加, 可得

$$\sum_{i,j} \varepsilon_{ij} k_i E_j = 0$$

由 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{E}_{\parallel}$, $\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})/k^2 = \mathbf{k} E_{\parallel}/k$, 得到 $E_j = E_{\perp j} + k_j E_{\parallel}/k$ ($i=1$ 到3) 并带入上式又得到:

$$E_{\parallel} = -\frac{\sum_{i,j} \varepsilon_{ij} k_i E_{\perp j}}{kA} \quad [2.5.7]$$

这里 $A = \frac{\sum_{i,j} \varepsilon_{ij} k_i k_j}{k^2} = \varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_2 \cos^2 \theta$

由此可见当时, 当 $A \rightarrow 0$, $|\mathbf{E}_{\parallel}|/|\mathbf{E}_{\perp}| \rightarrow \infty$, 即在共振点附近等离子体振荡是准静电振荡。

$B_0 \neq 0$ 时由条件 $A=0$ 决定的振荡称为磁场中的等离子体纵振荡,相应的振荡频率称为**混杂共振频率**或**等离子体共振频率**。

由[2.4.8]和[2.5.4]得到

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} \sin^2 \theta - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \sin^2 \theta = 0$$

[2.5.8]

这是个关于 ω^2 的三次方程, 它确定三个共振频率:

$$\omega = \omega_{\infty}^{(j)} \quad j=1, 2, 3.$$

[2.5.9]

这里脚标 ∞ 表示 $\omega_{\infty}^{(j)}$ 对应于无限大折射率 $k \rightarrow \infty$ 的本征频率。

当 $\theta=0$ 时, 对于平行于磁场方向传播的波, 方程[2.5.8]化为

$$\omega^2(\omega^2 - \omega_{ce}^2)(\omega^2 - \omega_{ci}^2) - \omega_{pe}^2(\omega^2 - \omega_{ce}^2)(\omega^2 - \omega_{ci}^2) - \omega_{pi}^2(\omega^2 - \omega_{ce}^2)(\omega^2 - \omega_{ci}^2) = 0$$

[2.5.10]

相应的共振频率

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\infty}^{(1)} &= \omega_{ci} \\ \omega_{\infty}^{(2)} &= \text{Min}(\omega_{ce}, \omega_p) \\ \omega_{\infty}^{(3)} &= \text{Max}(\omega_{ce}, \omega_p) \end{aligned} \right\} \quad [2.5.11]$$

对于任意角度情况下的共振频率 $\omega_{\infty}^{(1)(2)(3)}(\theta)$ ，可以用图2.5.2.来说明。频率为 $\omega_{\infty}^{(3)}$ 的振荡是纯电子振荡。频率 $\omega_{\infty}^{(2)}$ 在一定条件下也为纯电子振荡。但在 $\theta \rightarrow \pi/2$ 时的振荡是由电子和离子决定的振荡。频率为 $\omega_{\infty}^{(1)}$ 的振荡是在任意角度下都由电子和离子振荡来确定。

等离子体共振对电磁波在等离子体中的传播起重要作用。当接近共振频率时，波的阻尼和热噪声水平急剧增加。在共振频率附近的电磁波的折射率($N \gg 1$)很大，波变慢，相速度远小于光速。并出现等离子体和波之间有效的相互作用。

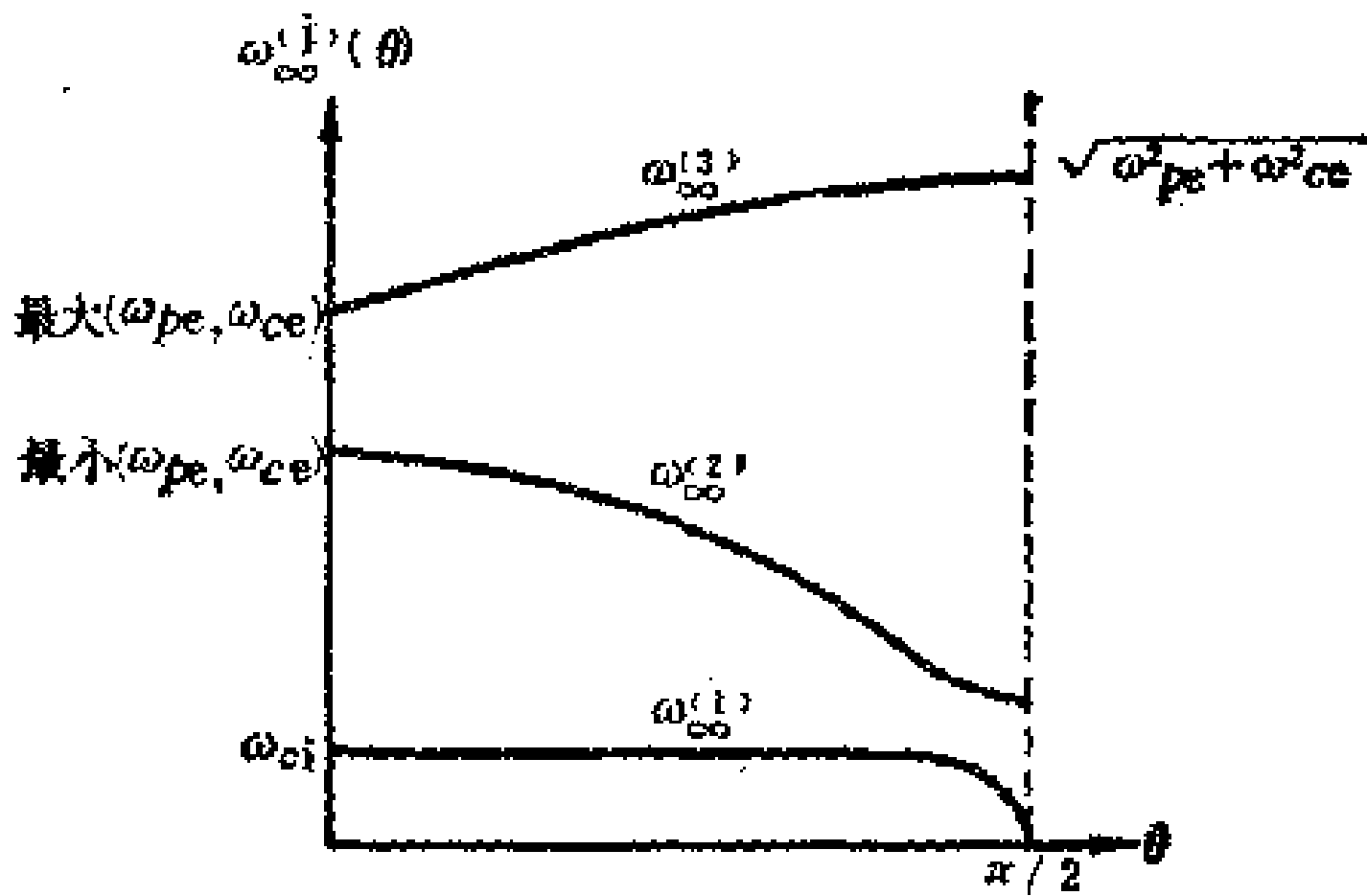


图2.5.2 磁场中等离子体纵振荡频率 $\omega_{\infty}^{(j)}$ 随角度 θ 的变化

色散曲线

通过物理量纲比较可知，截止频率和共振频率之间满足如下不等式

$$\omega_{\infty}^{(2)} < \omega_0^{(1)} < \omega_{\infty}^{(3)} < \omega_0^3 ; \quad \omega_{\infty}^{(1)} < \omega_0^{(2)} \quad [2.5.12]$$

其中 $\omega_0^{(2)}$ 的频率可大于或小于 $\omega_{\infty}^{(2)}$ ，决定于角度 θ 的大小。

为了说明 N^2 和 ω 关系的一般图象，除了要用上已经得到的函数 $N^2(\omega)$ 在零点和极点的图象外。还得考察一下对应于 $\omega=0$ 和 $\omega=\infty$ 的 $N^2(\omega)$ 值。

从[2.4.8]知道当 $\omega \rightarrow 0$ 时， $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ 及 $\varepsilon_3 \rightarrow -\infty$ ，因而由[2.4.13]和[2.4.14]式得到 N^2 的两个值：

$$N_1^2 = \frac{1+a^2}{\cos^2 \theta}; \quad N_2^2 = 1+a^2 \quad [2.5.13]$$

其中

$$a^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} = \frac{\mu_0(m_i + zm_e)nc^2}{B_0^2} \quad [2.5.14]$$

它们对应如下色散关系：

$$\omega_1^2 = k^2 \frac{c^2 v_A^2}{c^2 + v_A^2} \cos^2 \theta; \quad \omega_2^2 = k^2 \frac{c^2 v_A^2}{c^2 + v_A^2} \quad [2.5.15]$$

当 $v_A \ll c$ 时，上式可以写成

$$\omega_1^2 = k^2 v_A^2 \cos^2 \theta; \quad \omega_2^2 = k^2 v_A^2 \quad [2.5.16]$$

它们分别对应阿尔芬波和磁声波或快模波，其中 v_A 为阿尔芬速度。

从[2.4.8]知道当 $\omega \rightarrow \infty$ 时， $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ ， $\varepsilon_1 \rightarrow 1$ 及 $\varepsilon_3 \rightarrow 1$ ，因而 $N^2 \rightarrow 1$ 。当频率远大于等离子体特征频率时，极化不再起重要作用，等离子体对电磁波的影响很小，因而波的色散关系变的和真空一样：

$$N_1 = N_2 = 1, \quad \omega_1 = \omega_2 = kc \quad [2.5.17]$$

通过物理量纲来比较不同截止频率和共振频率的大小排序

$$\omega_{\infty}^{(1)} < \omega_0^{(2)} ; \quad \omega_{\infty}^{(2)} < \omega_0^{(1)} < \omega_{\infty}^{(3)} < \omega_0^3$$

以 ω_{ci} 为起点随 θ 下降 $\omega_0^{(2)} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 + \frac{(\omega_{ce} + \omega_{ci})^2}{4}} - \frac{\omega_{ce} - \omega_{ci}}{2}$;

以 $\text{Min}(\omega_{ce}, \omega_{pe})$ 为起点随 θ 下降 $\omega_p <$ 以 $\text{Max}(\omega_{ce}, \omega_{pe})$ 为起点随 θ 上升 $\omega_0^{(3)} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 + \frac{(\omega_{ce} + \omega_{ci})^2}{4}} + \frac{\omega_{ce} - \omega_{ci}}{2}$

根据以上得到的关于函数的在零点和极点的以及 $\omega=0$ 和 $\omega=\infty$ 时的值，不难画出色散曲线。图2.5.3.为斜传播(θ 既不等于0也不等于 $\pi/2$)情况下 $N_2(\omega)$ - ω 关系曲线。上半平面是波的透明区，下半平面的值确定给定电磁波的趋附肤深度。图2.5.4.说明在透明区 $\omega^{(j)}(k, \theta) - k$ 的关系曲线。

由图2.5.3.表明的色散曲线可知,在磁化“冷”等离子体中存在着五种波：

- 阿耳文分支(A)
- 快磁声分支(FMS)
- 慢非寻常分支(SE)
- 寻常分支(O)
- 快非寻常分支(FE)

从图2.5.3.表明的分支有实线和虚线两种，实线对应 $\omega_0^{(2)} < \omega_\infty^{(2)}$ ，虚线对应于 $\omega_0^{(2)} > \omega_\infty^{(2)}$ 情况。

在 $\omega < \omega_\infty^{(1)}$ 区有两种波——阿耳文分支(A)和快磁声分支(FMS)可以传播。

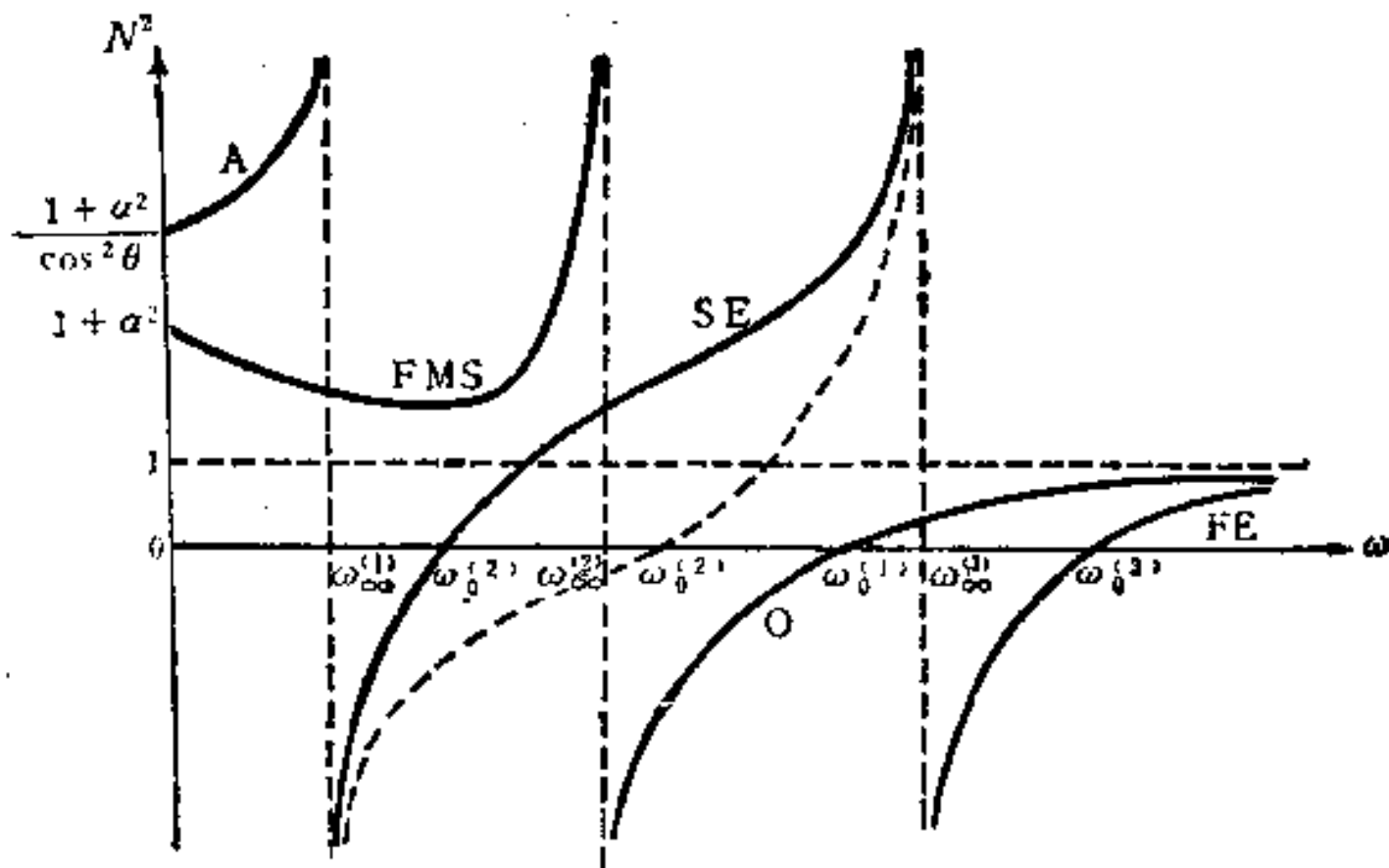


图2.5.3 冷磁化等离子体中斜 (θ 既不等于0也不等于 $\pi/2$) 传播的电磁波的 $N^2(\omega) - \omega$ 的关系

在 $\omega_{\infty}^{(1)} < \omega < \omega_0^{(2)} < \omega_{\infty}^{(2)}$ 区只有一种波——快磁声分支(FMS)可以传播。

在 $\omega_0^{(2)} < \omega < \omega_{\infty}^{(2)}$ 区有两种波——快磁声分支(FMS)和慢非寻常分支(SE)可以传播。

但是若 $\omega_0^{(2)} > \omega_{\infty}^{(2)}$ ，则在 $\omega_{\infty}^{(1)} < \omega < \omega_{\infty}^{(2)}$ 区只有一种波快磁声分支(FMS)可以传播。而在 $\omega_{\infty}^{(2)} < \omega < \omega_0^{(2)}$ 区没有波，在 $\omega_0^{(2)} < \omega < \omega_0^{(1)}$ 区只有一种波慢非寻常分支(SE)可以传播。

在 $\omega_0^{(1)} < \omega < \omega_{\infty}^{(3)}$ 区有两种波——慢非寻常分支(SE)和寻常分支(O)可以传播。

在 $\omega_{\infty}^{(3)} < \omega < \omega_0^{(3)}$ 区只有一种波寻常分支(O)可以传播。

在 $\omega > \omega_0^{(3)}$ 区有两种波——寻常分支(O)和快非寻常分支(FE)可以传播。

从图2.5.4.可见波的频率 $\omega^{(j)}(k, \theta)$ 随波数的增大而单调增大，这表示在“冷”等离子体中的色散总是正常的，波的传播方向和群速度之间的角度总是小于 $\pi/2$ 。

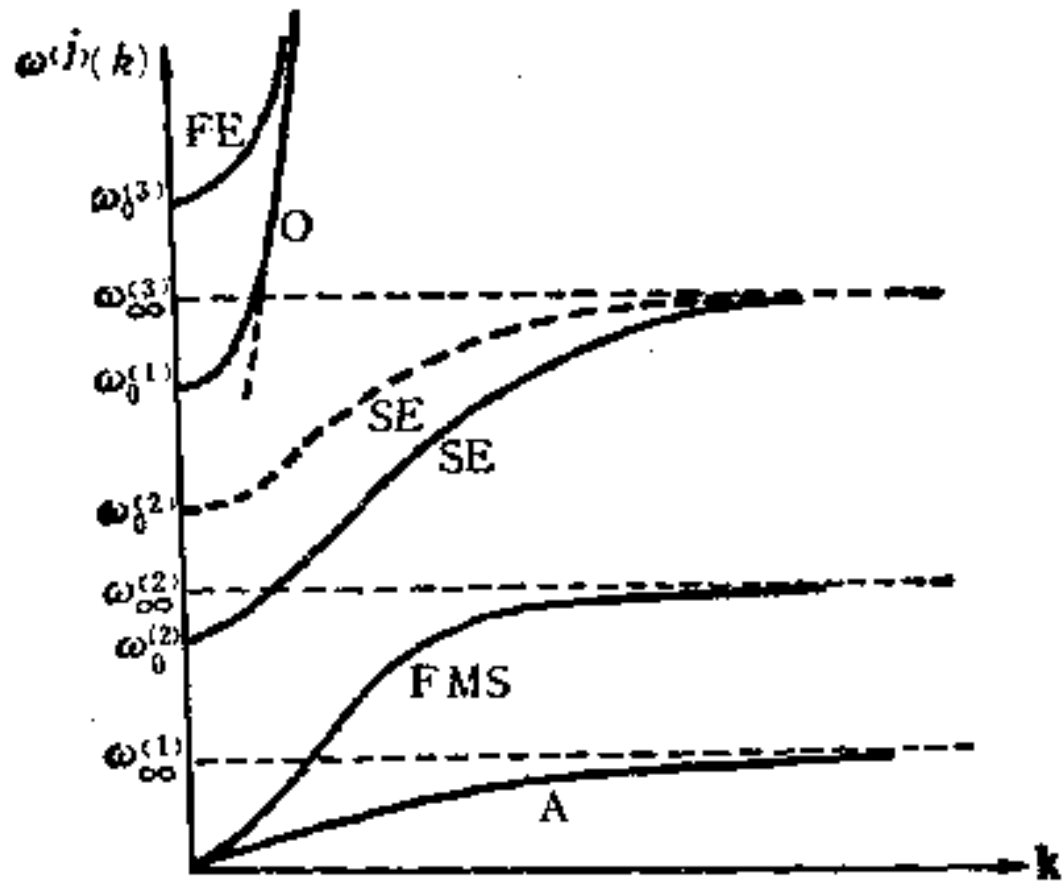


图2.5.4 冷磁化等离子体中斜 (θ 既不等于0也不等于 $\pi/2$) 传播的电磁波的 $\omega^{(j)}(k) - k$ 的关系

2.6. “冷”等离子体中平行于磁场方向传播的波

现在来看在“冷”等离子体中平行于磁场方向传播的波的特性。当 $\theta=0$ 时，由色散关系[2.4.15]得到

$$\varepsilon_3=0; \quad N^2=\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \quad [2.6.1]$$

并且由[2.4.11]式可知，这时电场矢量的各分量方程

$$\left. \begin{aligned} (N^2-\varepsilon_1)E_x - i\varepsilon_2 E_y &= 0 \\ i\varepsilon_2 E_x - (N^2-\varepsilon_1)E_y &= 0 \\ \varepsilon_3 E_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [2.6.2]$$

由此可见，波动分成独立的两种，一种是电场矢量沿磁场方向的纵振荡（ $E_z \neq 0$ ），其色散关系 $\varepsilon_3 = 1 - \sum_{\alpha} \omega_{pe}^2 / \omega^2 = 0$ 和无磁场时的静电振荡的色散关系一样。这是由于静电振荡中粒子的运动方向沿波的传播方向，而波的传播方向又是沿外磁场方向，因而外磁场对粒子的运动没有影响。另一种为电场矢量垂直磁场方向同时又有旋转的电磁波。

有了磁场后，原来两个独立的直线偏振的电磁波变成一种新型的波，它具有圆偏振性质。这是由于在磁场中带电粒子不是直线运动而是做回旋运动的缘故。这种具有圆偏振性质的电磁波称为**回旋波**。

从将 $N^2 = \epsilon_1 \pm \epsilon_2$ 带入[2.6.2]的第一和第二式求得

$$E_x = \pm i E_y \quad [2.6.3]$$

这表示电场矢量是圆偏振的，(+)号表示**左旋圆偏振波**，这时电场矢量的回旋方向和离子回旋方向相同；(-)号表示**右旋圆偏振波**，这时电场矢量的回旋方向与电子回旋方向相同(图2.6.1)。

分析 $E_x = \pm i E_y$ 的波，考察其实数分量为

$$E_y \sim R_e e^{-i\omega t} = \cos \omega t; E_x = \pm i E_y \sim R_e e^{-i\omega t} = \pm \sin \omega t$$

得到， $\tan \varphi = E_x / E_y = \pm \tan \omega t$ ，对于角度 $\varphi = \omega t$ 来说， φ 增大， $+\tan \omega t$ 对应于左向旋转； φ 增大， $-\tan \omega t$ 对应于右向旋转。从物理上看，磁场指向纸外，离子左旋对应于我们的左手。电子右旋对应于我们的右手。

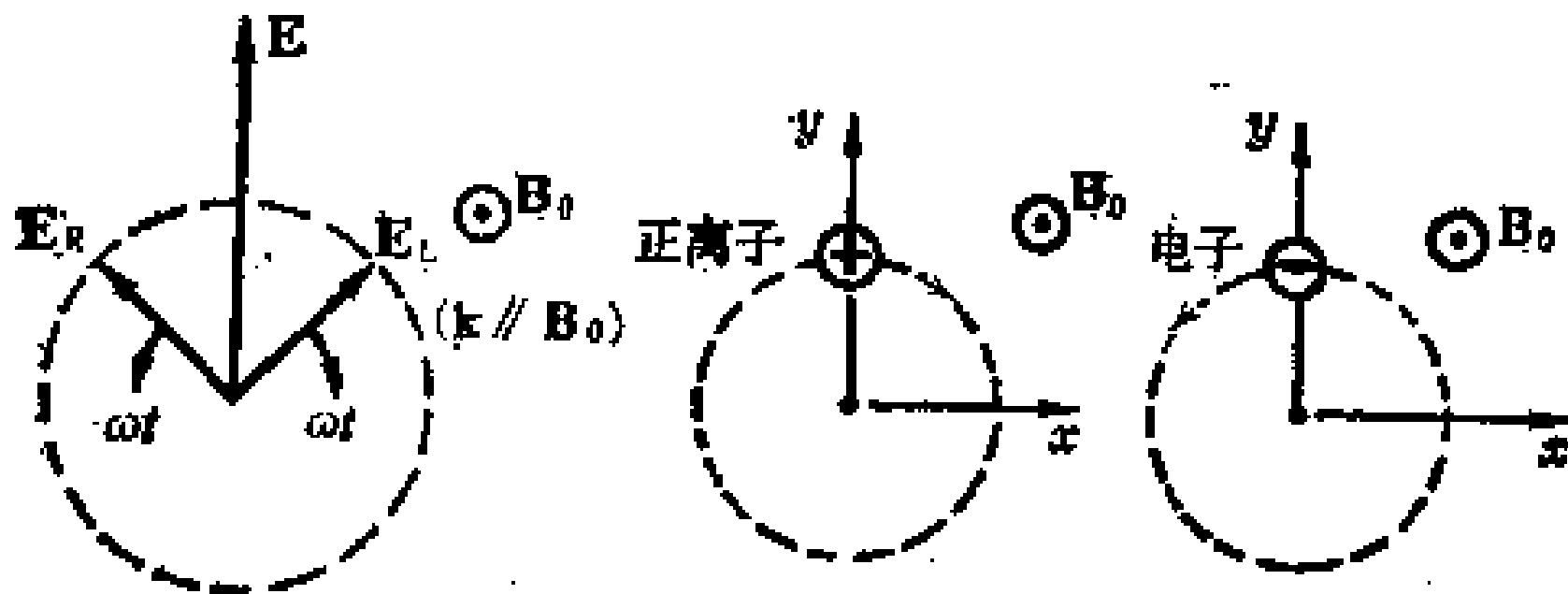


图2.6.1 左旋与右旋圆偏振波的电成场矢量

从 $N^2=\epsilon_1+\epsilon_2$ 得到回旋波的色散关系为:

$$N^2 = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega(\omega \mp \omega_{c\alpha})} \quad [2.6.4]$$

对于左旋波和右旋波对于分别有

$$N^2 = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega(\omega - \omega_{c\alpha})} = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega - \omega_{ci})} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + \omega_{ce})} \quad [2.6.5]$$

$$N^2 = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega(\omega + \omega_{c\alpha})} = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega + \omega_{ci})} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})} \quad [2.6.6]$$

上面左旋波和右旋波的色散关系不同，因此波的传播特性也会不同。

法拉第旋转

当直线偏振波在等离子体中沿磁场方向传播时,其偏振面以磁场方向为轴旋转 (见图2.6.2) , 这种现象称为法拉第旋转。

$$\left. \begin{aligned} \text{左右旋波的总电场可以写成} \\ \mathbf{E}_L = (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) E_L e^{i(\mathbf{k}_L z - \omega t)} \\ \mathbf{E}_R = (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) E_R e^{i(\mathbf{k}_R z - \omega t)} \end{aligned} \right\} \quad [2.6.7]$$

这里 E_L, E_R ,为左右旋波的电场幅度; $k_L = \omega N_L/c$; $K_R = \omega N_R/c$ 为波数, 直线偏振波的总电场是

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_R = & [\mathbf{e}_x (E_L e^{i(\mathbf{k}_L z - \omega t)} + E_R e^{i(\mathbf{k}_R z - \omega t)}) \\ & - i\mathbf{e}_y (E_L e^{i\mathbf{k}_L z} + E_R e^{i\mathbf{k}_R z})] e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad [2.6.8]$$

分量 E_x, E_y 之比为

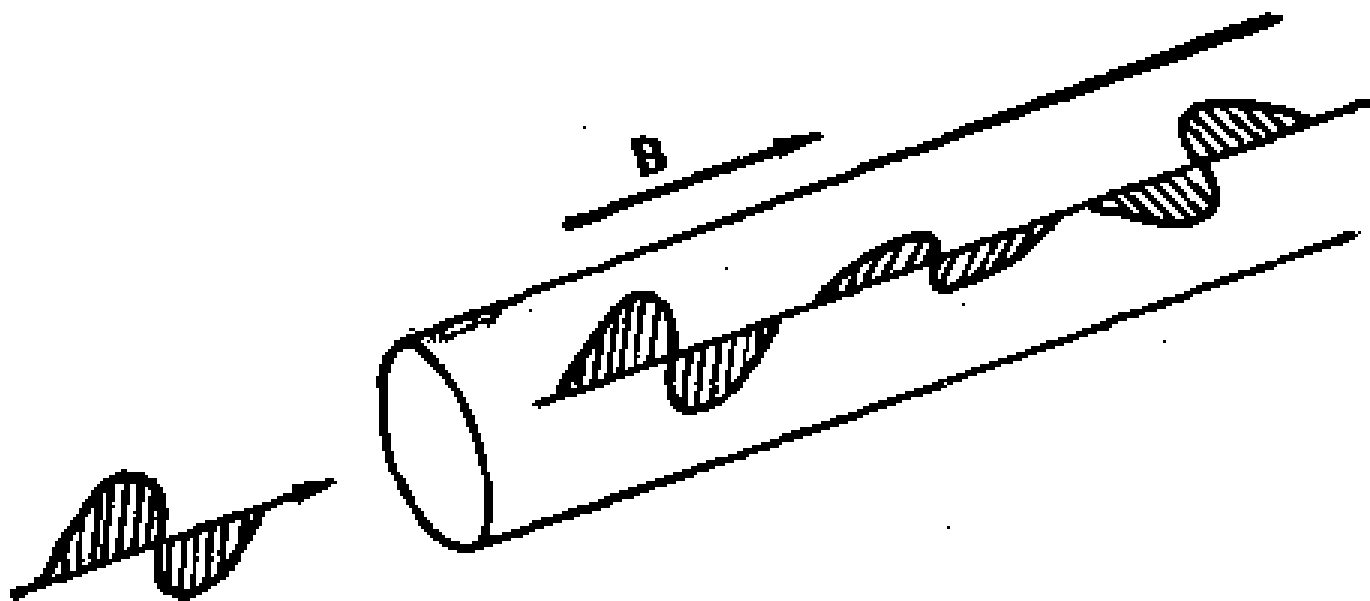


图2.6.2当直线偏振的电磁波在等离子体中沿磁场方向传播时其偏振面旋转的示意图

$$\frac{E_x}{E_y} = -i \frac{1 + (\frac{E_L}{E_R})e^{i(k_L - k_R)z}}{1 - (\frac{E_L}{E_R})e^{i(k_L - k_R)z}} \quad [2.6.9]$$

对于 $E_L/E_R=1$ 情形上式化为

$$\frac{E_x}{E_y} = -ctg \frac{k_L - k_R}{2} z \quad [2.6.10]$$

由此可见，在磁化等离子体中，当沿磁场方向传播的直线偏振波围绕磁场旋转，旋转的大小决定于传播的距离和左右旋波的波数之差（它由等离子体的密度和磁场强度来确定）。

法拉第旋转可以用来诊断等离子体密度。对于 $\omega \gg \omega_{pe}$ 的高频电磁波由[2.6.5]和[2.6.6]可以得到 $k_L - k_R = \omega N_L/c - \omega N_R/c \cong \omega_{pe}^2 \omega_{ce} / (\omega^2 c)$ [家庭作业]。于是由式[2.6.10]可知，当高频波沿磁场由传播距离时法拉第旋转角为

$$\phi(\omega \gg \omega_{pe}) = \frac{e^3 B_0}{2\epsilon_0 m_e^2 c \omega^2} n_e z \quad [2.6.11]$$

因此若已知 ω ， B_0 和 z ，则由测得的角度 ϕ 可以算得电子密度 n_e 。若已知 ω ， n_e 和 z ，则法拉第旋转可以用来诊断沿波传播方向的磁场强度。

左旋波和右旋波截止频率一般不一样，因此对于一定频率范围的电磁波，会出现只传播一种回旋波而另外一种回旋波被等离子体全反射的情况。这提供了法拉第旋转可以将直线偏振波变成圆偏振波的一种手段。

回旋波的截止与共振

左旋波和右旋波的截止条件分别由 $N_L^2 = \epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$ 和 $N_R^2 = \epsilon_1 - \epsilon_2 = 0$ 决定。对于有电子和一价离子组成的等离子体，由[2.6.5]和[2.6.6]可以得到

$$N_L^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - \omega_{ci})(\omega + \omega_{ce})} \quad [2.6.12]$$

$$N_R^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - \omega_{ce})(\omega + \omega_{ci})} \quad [2.6.13]$$

这里 $\omega_p^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2$ ，因此截止频率分别是

$$\omega_0^{(L)} = \left[\omega_p^2 + \frac{(\omega_{ce} + \omega_{ci})^2}{4} \right]^{1/2} - \frac{\omega_{ce} - \omega_{ci}}{2} \cong \left(\omega_p^2 + \frac{\omega_{ce}^2}{4} \right)^{1/2} - \frac{\omega_{ce}}{2} \quad [2.6.14]$$

$$\omega_0^{(R)} = \left[\omega_p^2 + \frac{(\omega_{ce} + \omega_{ci})^2}{4} \right]^{1/2} + \frac{\omega_{ce} - \omega_{ci}}{2} \cong \left(\omega_p^2 + \frac{\omega_{ce}^2}{4} \right)^{1/2} + \frac{\omega_{ce}}{2} \quad [2.6.15]$$

左旋波和右旋波的共振条件分别由 $N_L^2=\infty$ 和 $N_R^2=\infty$ 决定。对于有电子和一价离子组成的等离子体，由[2.6.12]和[2.6.13]可以得到左旋波和右旋波共振频率分别为

$$\omega_{\infty}^{(L)} = \omega_{ci} \quad [2.6.16]$$

$$\omega_{\infty}^{(R)} = \omega_{ce} \quad [2.6.17]$$

前面讲过左旋波的电场矢量和离子回旋方向相同，当 $\omega = \omega_{ci}$ 时电场矢量回旋频率与离子回旋频率相同，使离子发生共振，称为**离子回旋共振**。

右旋波的电场矢量与电子回旋方向相同，当 $\omega = \omega_{ce}$ 时发生电子共振，称为**电子回旋共振**

共振时波的能量分别部分被等离子体吸收。因此利用回旋波的共振现象可以加热等离子体。

下面进一步分析不同频率回旋波的性质。

1. 高频波 ($\omega > \omega_{ce}$)

在 $\omega \gg \omega_{ci}$, ω_{pi} 频率区域, 色散关系[2.6.12]和[2.6.13]和化为

$$N_L^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + \omega_{ce})} \quad [2.6.18]$$

$$N_R^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})} \quad [2.6.19]$$

他们自然也适用于 $\omega > \omega_{ce}$ 的频率区域。由此可见:

(1) 当 $\omega \gg \omega_{ce}$ 时,

$$N_L^2 = N_R^2 = 1 \quad [2.6.20]$$

也 $|v_p| = c$ 即, 表示极高频率的电磁波通过等离子体与通过真空一样。这是由于极高时电子和离子都来不及响应的缘故。

(2) 在 $\omega > \omega_{ce}$ 区域, 左旋和右旋波分别有截止频率 $\omega_0^{(L)}$ 和 $\omega_0^{(R)}$ [见[2.6.14]和[2.6.15]], 并且
 $\omega > \omega_0^{(R)}$ 区域 左旋和右旋波都能传播;

$\omega_{ce} < \omega < \omega_0^{(R)}$ 区域: 只有左旋波能传播;
 $\omega_0^{(L)} < \omega < \omega_{ce}$ 区域: 左旋和右旋波都能传播 (低密度等离子体情形 [参看图2.6.5]) ;

2. 电子回旋波 ($\omega \lesssim \omega_{ce}$)

由方程[2.6.18]和[2.6.19]式可见, 在此频率范围 $N_R^2 > 0$, 而 $N_L^2 < 0$, 因而只有右旋波能传播, 并在 $\omega = \omega_{ce}$ 处产生电子回旋共振。所以通常这个频率区域的回旋波为**电子回旋波**。

3. 哨声波 ($\omega_{ci} < \omega \ll \omega_{ce}$)

同上面一样, 这个频率范围也只有由右旋波能传播。由于 $\omega \ll \omega_{ce}$, 色散关系[2.6.19]化为

$$N_R^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega \omega_{ce}} \quad [2.6.21]$$

由此可见，这时回旋波的群速度随频率的增高而变大

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c}{\omega_{pe}} \sqrt{\omega_{ce} \omega} \quad [2.6.22]$$

这说明在包含许多频率成分的等离子体回旋波沿磁力线传播的高频成份比低频成份快，在原远处的宽带接收机以先高频后低频的次序接收电磁波，机上喇叭发出的声音象哨声一样，因此称为**哨声波**。图2.6.4为闪电引起的哨声波沿地磁力线传播到另一半球共轭点的示意图

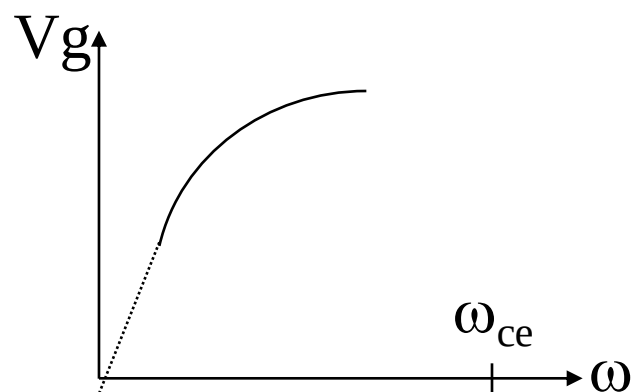


图2.6.3 哨声波的群速度随频率的变化

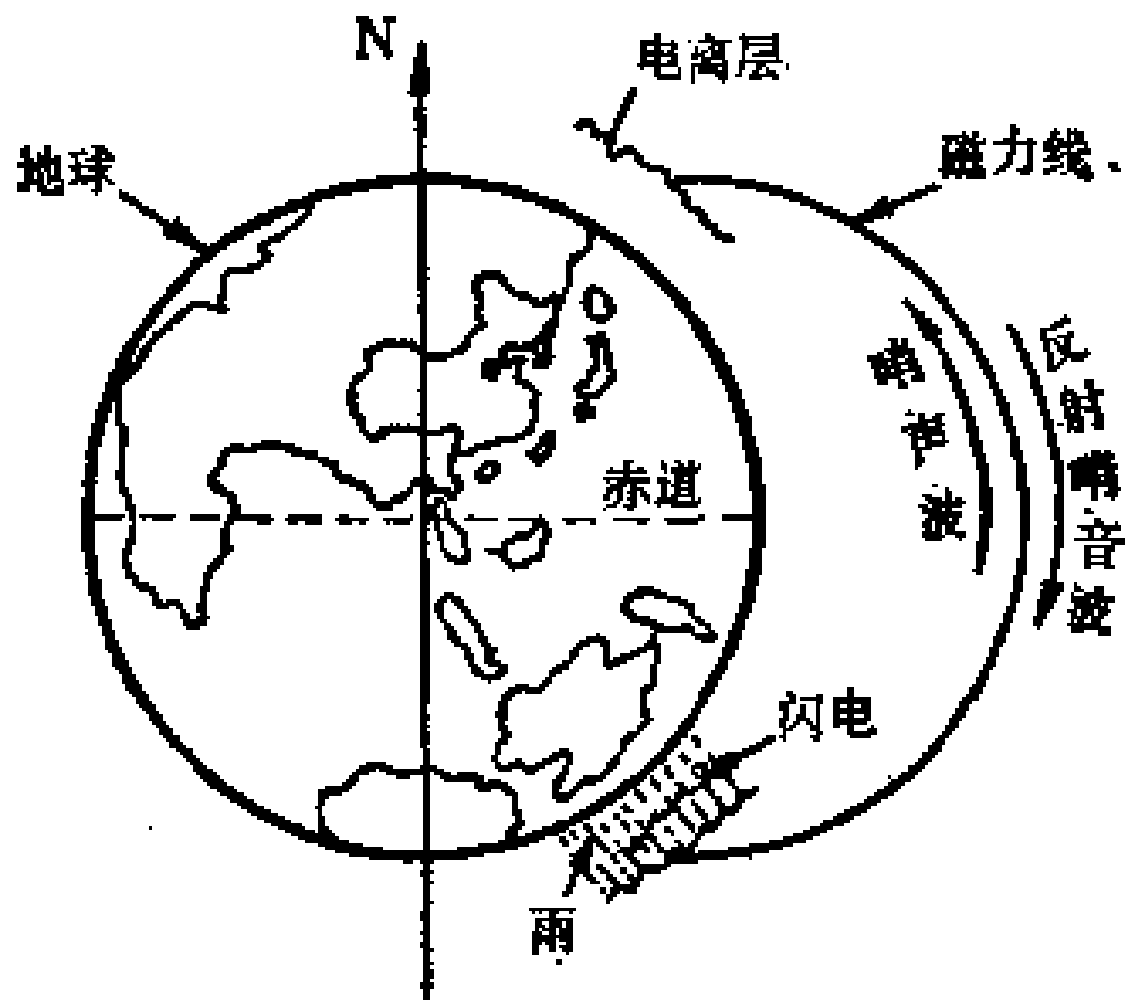


图2.6.4为闪电引起的哨声波沿地磁力线传播到另一半球共轭点的示意图

哨声波是研究电离层、空间物理和地磁场的有用信息。例如，利用不同频率的哨声波速度不同而引起的时间延迟，可以诊断等离子体密度。由[2.6.21]式，哨声波的群速度为

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{2kc^2}{\omega_{pe}^2} \omega_{ce} \quad [2.6.23]$$

因此频率为 ω 的哨声波在路程上所需时间为

$$t = \int \frac{ds}{\partial \omega / \partial k} = \int_{\text{路程}} \frac{\omega_{pe}(x)}{2c\sqrt{\omega\omega_{ce}}} ds \quad [2.6.24]$$

对于接近电子回旋频率的波，根据类似方法可将上式应写为

$$t = \frac{1}{2c} = \int \frac{\omega_{pe}}{\sqrt{\omega}} \frac{2\omega - \omega_{ce}}{(\omega_{ce} - \omega)^{3/2}} ds \quad [2.6.25]$$

这里。 $0 < \omega_{ce} - \omega \ll \omega_{ce}$ ，由此可见，在已知路程、波频和测得时间的情况下，可以诊断等离子体密度。 [家庭作业]

4. 离子回旋波 ($\omega \lesssim \omega_{ci}$)

由于 $\omega_{ci} \ll \omega_{ce}$ ，在此频率范围内色散关系[2.6.12]和[2.6.13]化为

$$N_{LR}^2 = 1 \mp \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}(\omega \mp \omega_{ci})} = 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}(\omega_{ci} \mp \omega)} \quad [2.6.26]$$

上式只与离子振荡有关。由此可见，在波的频率接近离子回旋共振频率的频谱区域，离子对回旋波起主要作用。在 $\omega = \omega_{ci}$ 处，左旋波的和离子运动产生离子回旋共振。

在无外场“冷”等离子体中对波动起主要作用的是电子，因为这是这时决定粒子振荡特性的主要是电子的质量。但是有了外磁场后，粒子围绕外磁场作回旋运动，这是决定带电粒子振荡的性质的的重要因素是粒子的回旋性质，主要是回旋频率。因此在高频区域($\omega \approx \omega_{ce}$)电子起主要作用，在中低频区域离子起主要作用。由于等离子体的质量主要是离子的质量，因此离子起主要作用时，等离子体的质量发生振荡。

5. 低频波 ($\omega \ll \omega_{ci}$)

当频率远离离子回旋频率小于时, [2.6.26]式化为

$$N_{LR}^2 = 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} = 1 + \frac{\mu_0 \rho \rho_0}{B_0^2} c^2 = 1 + \frac{c^2}{v_A^2} \quad [2.6.27]$$

或

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{v_A}{(1 + v_A^2 / c^2)^{1/2}} \quad [2.6.28]$$

这里 $v_A = B / \sqrt{\mu_0 \rho_0}$ 为阿尔芬速度。这表明, 回旋波在低频时连续过度到阿尔芬波。由于左、右旋圆偏振波的相速度相同, 因此, 阿尔芬波显然是直线偏振的。

图2.6.5表示根据上述结果所画的折射率和频率以及波数和频率的关系曲线, 和一般情形 (θ 既不等于0也不等于 $\pi/2$) 不同, “冷” 等离子体中沿磁场方向传播 ($\theta=0$) 的波只有四个振荡分支。消失了一个分支由朗缪尔振荡代替, 并且只有两个共振频率 (ω_{ci} , ω_{ce}) 和两个截止频率 ($\omega_0^{(L)}$, $\omega_0^{(R)}$)。

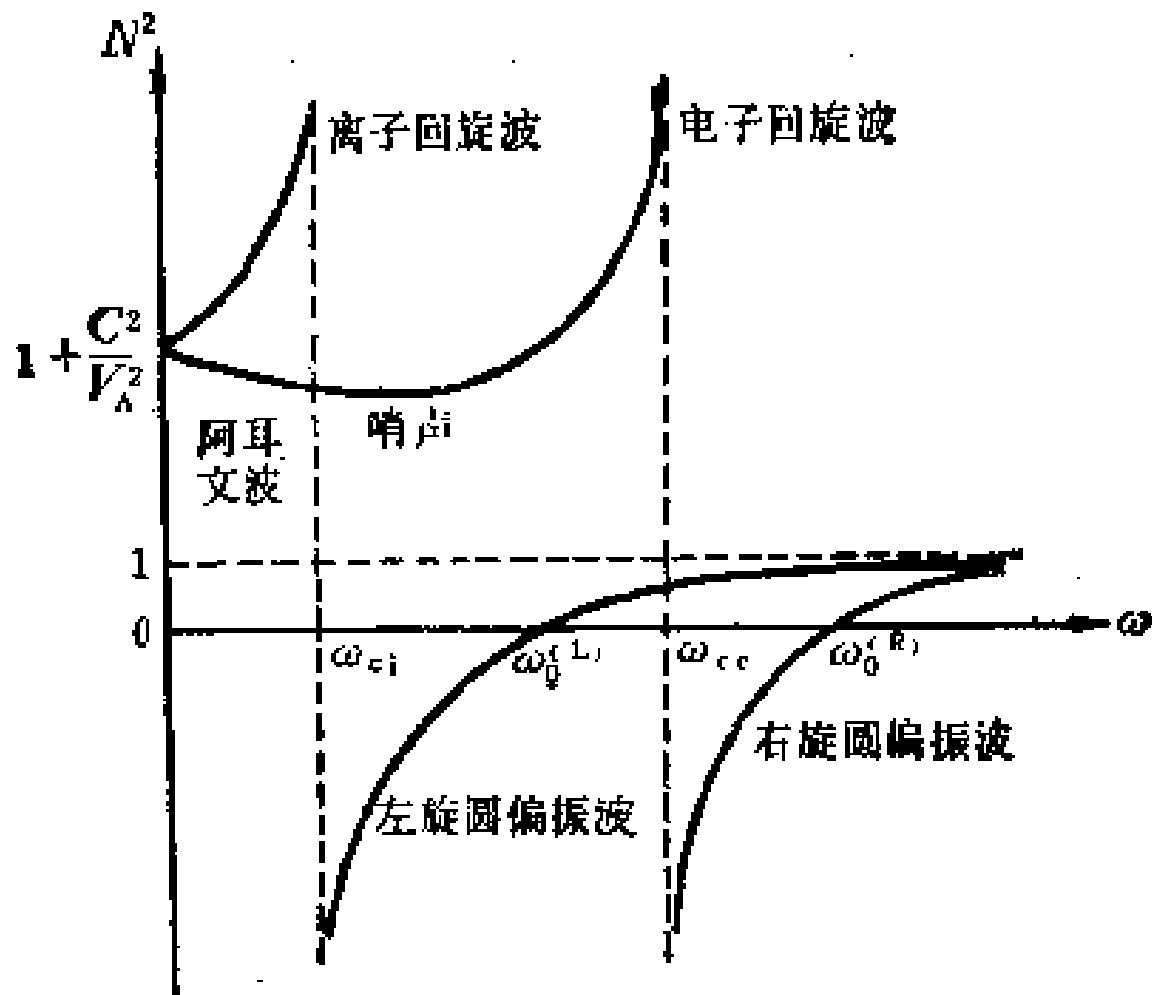


图2.6.5 磁化“冷”等离子体中平行于磁场方向传播($\theta=0$)的电磁波的折射率平方和频率的关系 ($\omega_{pe} < \omega_{ce}$)

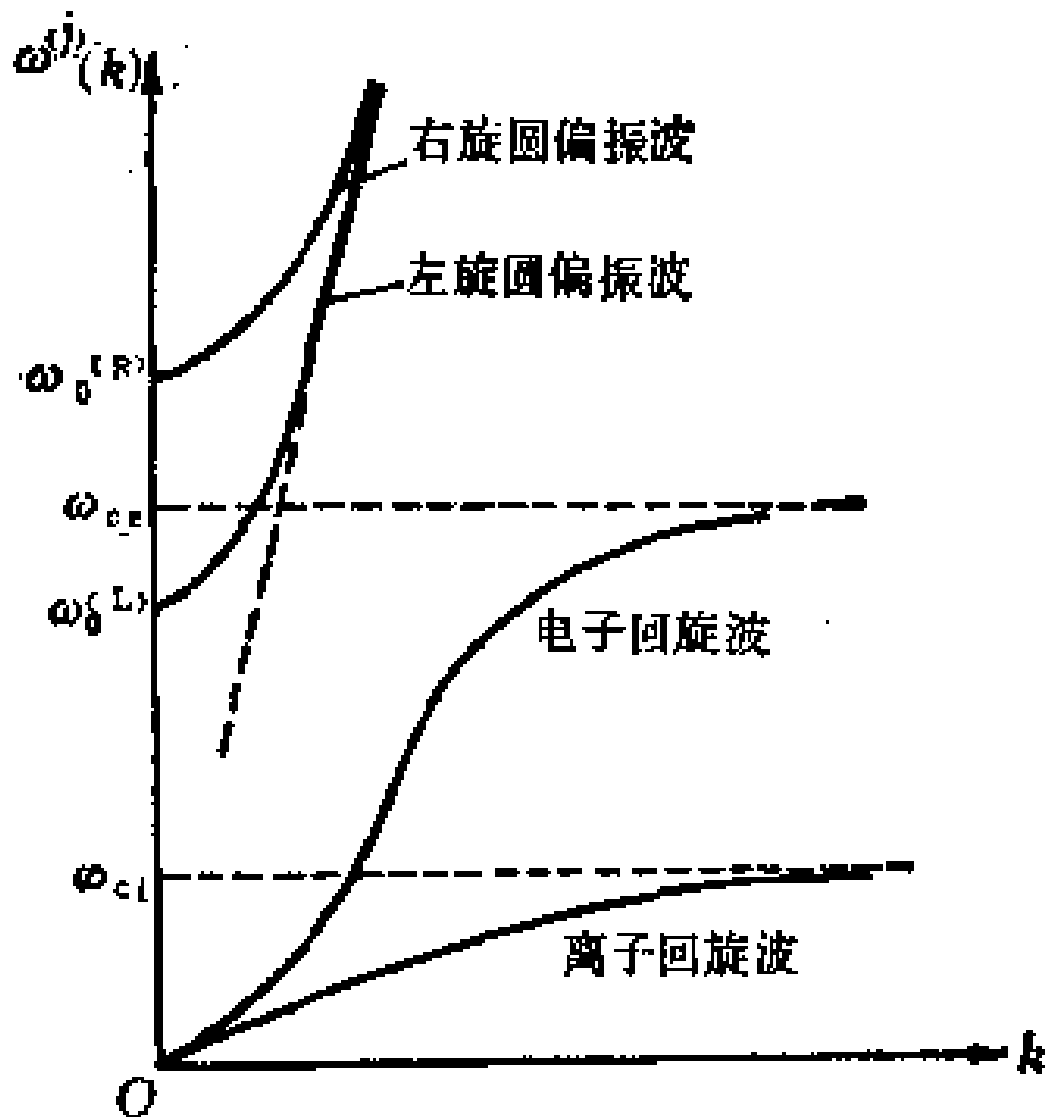


图2.6.6 磁化“冷”等离子体中平行于磁场方向传播 ($\theta=0$) 的电磁波的振荡频率和波数的关系 ($\omega_{pe} < \omega_{ce}$)

2.7. “冷”等离子体中垂直于磁场方向传播的波

现在来看在“冷”等离子体中垂直于磁场方向传播的波的特性。当 $\theta=\pi/2$ 时，由色散关系[2.4.15]得到

$$N^2 = \varepsilon_3 \quad [2.7.1]$$

$$N^2 = (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) / \varepsilon_1 \quad [2.7.2]$$

并且由[2.4.11]式可知，这时电场矢量的各分量方程

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 E_x + i\varepsilon_2 E_y &= 0 \\ i\varepsilon_2 E_x + (N^2 - \varepsilon_1) E_y &= 0 \\ (N^2 - \varepsilon_3) E_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [2.7.3]$$

由此可见，波动分成独立的两种，一种波 ($E_x = E_y = 0, E_z \neq 0$) 的色散关系为

$$N^2 = \varepsilon_3 = 1 - \sum_{\alpha} \omega_{pe}^2 / \omega^2 \quad [2.7.4]$$

它和无磁场时直线偏振电磁波的色散关系[2.3.13]完全一样，称为**寻常波**。寻常波的电场矢量平行于磁场 ($\mathbf{E}_z \parallel \mathbf{B}_0$)。由式可知，这时带电粒子的运动方向平行于磁场，因而磁场对带电粒子的运动和电磁波都没有影响。

另一种波是与色散关系[2.7.2]相对应的波。这种波的电场矢量位于垂直于磁场的平面上，由纵向分量 ($\mathbf{E}_x \parallel \mathbf{k}$) 和横向分量 ($\mathbf{E}_y \perp \mathbf{k}$) 所组，可见它是纵波与横波的**混杂波**，称为**非寻常波**。

这种波里的电场矢量纵向分量不等于零 ($\mathbf{E}_x \neq 0$) 的原因是由于电荷在交叉场 $\mathbf{E}_y$ 和 $\mathbf{B}_0$ 中沿 x 方向漂移。只有在 $\omega \ll \omega_{ci}$ 的情况下电子和离子的漂移速度才相等。一般情况下它们的漂移速度是不同的，并且引起电荷分离；这个电荷分离产生纵向电场 $E_x = (-i\varepsilon_2/\varepsilon_1) E_y$ 。

由于 $|\mathbf{E}_x| \neq |\mathbf{E}_y|$ ，非寻常波一般是椭圆偏振的（见图 2.7.1）。在 $\omega \rightarrow 0$ 的低频区 $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ ，因而 $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \rightarrow 0$ ，比值 E_x/E_y 变的很小。但是在 $N_2 \rightarrow \infty$ 共振点，情况就完全不同，由[2.7.3]式可知，这时横向分量 $E_y \rightarrow 0$ ，描述振荡的方程就变成 $\varepsilon_1 E_x = 0$ 即纵振荡。

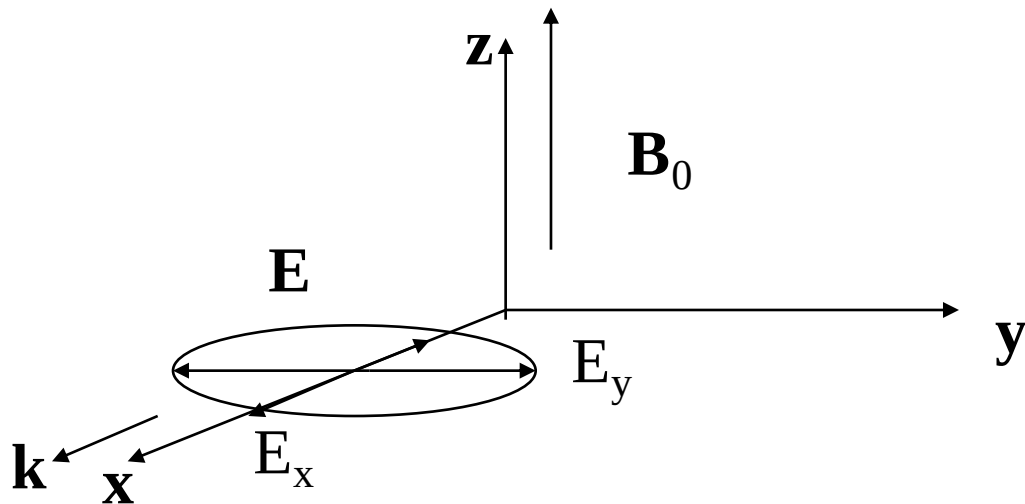


图2.7.1. 非寻常波的电场矢量是椭圆偏振的

试考察非寻常波的电子运动。在交叉场 $\mathbf{E}_x$ 和 $\mathbf{B}_0$ 中电子的运动方程是

$$\left. \begin{aligned} -i\omega u_x &= -e E_x / m_e - u_y \omega_{ce} \\ -i\omega u_y &= u_x \omega_{ce} \end{aligned} \right\} \quad [2.7.5]$$

令， $E_x = E_0 e^{i\psi}$ ，因而 $\text{Re} E_x = E_0 \cos \psi$ ，则

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{-e}{m_e (\omega_{ce}^2 - \omega^2)} E_0 \cos \psi \\ y &= \frac{-e}{m_e (\omega_{ce}^2 - \omega^2)} \frac{\omega_{ce}}{\omega} E_0 \sin \psi \end{aligned} \right\} \quad [2.7.6]$$

由此可知，电子的运动轨道是椭圆；

$$\frac{x^2}{\omega^2} + \frac{y^2}{\omega_{ce}^2} = \frac{e^2 E_0^2}{m_e^2 (\omega_{ce}^2 - \omega^2)^2 \omega^2} \quad [2.7.7]$$

当 $\omega \ll \omega_{ce}$ 时这是个沿垂直 $\mathbf{k}$ 和 $\mathbf{B}_0$ 方向（即y方向）大大拉长的椭圆。

将[2.4.8]式中的 ε_1 和 ε_2 带入[2.7.2]式，可得非寻常波的色散关系的具体表达式：

$$N^2 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1} = \frac{(1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega(\omega - \omega_{c\alpha})})(1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega(\omega + \omega_{c\alpha})})}{1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{c\alpha}^2}} \quad [2.7.8]$$

对于由电子和一价离子组成的等离子体，式可以化为

$$N^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_{ci}\omega_{ce})^2 - \omega^2(\omega_{ce}^2 - \omega_{ci}^2) - 2\omega_{pe}^2(\omega^2 - \omega_{ci}\omega_{ce}) + \omega_{pe}^4}{(\omega^2 - \omega_{ci}\omega_{ce})^2 - \omega^2(\omega_{ce}^2 - \omega_{ci}^2) - \omega_{pe}^2(\omega^2 - \omega_{ci}\omega_{ce})} \quad [2.7.9]$$

根据上方程可以讨论不同频谱区域的波动特征。

1. 高频波

在 $\omega \sim \omega_{ce} \gg \omega_{ci}$ 的高频区域，[2.7.9]近似地化为

$$N^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_{pe}^2)^2 - \omega^2\omega_{ce}^2}{\omega^2(\omega^2 - \omega_{ce}^2 - \omega_{pe}^2)} = \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_H^2)} \quad [2.7.10]$$

由此可见，在高频区域有两个截止频率

$$\omega_1 = \frac{\omega_{ce}}{2} \left[-1 + \left(1 + \frac{4\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \right)^{1/2} \right] \quad [2.7.11]$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_{ce}}{2} \left[1 + \left(1 + \frac{4\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} \right)^{1/2} \right] \quad [2.7.12]$$

和一个共振频率

$$\omega_H = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2} \quad [2.7.13]$$

称为高混杂频率。同时由[2.7.10]式可知

(1) 当 $\omega \gg \omega_H$ 时, $N^2 = (kc/\omega)^2 = 1$, 即在极高频区域非寻常波的与真空中传播的电磁波一样。

(2) 在 $\omega > \omega_2$ 和 $\omega_H > \omega > \omega_1$ 区域 $N^2 > 0$, 因而波能传播; 而在 $\omega_2 > \omega > \omega_H$ 和 $\omega_1 > \omega$ 区域 $N^2 < 0$, 因而没有波。这表示在高频区域有两种非寻常波。

2. 中、低频波

在 $\omega \ll \omega_{ce}$ 的频谱区, 离子运动起主要作用, 色散关系[2.7.2]化为

$$N^2 = \frac{\omega_{ce}^2 (\omega_{ci}^2 - \omega^2) (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\omega_H^2 (\omega^2 - \omega_{ce} \omega_{ci} \frac{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce} \omega_{ci}}{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2})} \quad [2.7.14]$$

由此可见，当

$$\omega_{LH} = \sqrt{\omega_{ce}\omega_{ci}} \quad [2.7.15]$$

时 $N^2 = \infty$ ，产生共振，称为**低混杂频率**，并且只有在 $\omega < \omega_{LH}$ 区域 $N^2 > 0$ ，波能传播(此时用到 $c^2 > v_A^2$ ， $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 > 0$)。

在很低频率 ($\omega \ll \omega_{ci}$) 区域 $\varepsilon_2 = 0$ ，故 $N^2 = \varepsilon_1$ ，即

$$\left(\frac{k c}{\omega}\right)^2 = 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} = 1 + \frac{\rho}{\varepsilon_0 B^2} \quad [2.7.16]$$

或

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{v_A}{(1 + v_A^2 / c^2)^{1/2}} \quad [2.7.17]$$

其中这里 v_A 为阿尔芬速度。上式显然是磁声波的色散关系。这表明，非寻常波波在低频时连续过度到磁声波。

图2.7.2和图2.7.3为根据上述结果所画的关系曲线，和 $\theta=0$ 时类似， $\theta=\pi/2$ 时也只有四个振荡分支。只是阿尔芬分支“消失”，并且只有两个共振频率（ ω_{LH} ， ω_{H} ）和三个截止频率（ ω_1 ， ω_2 ， ω_p ）。

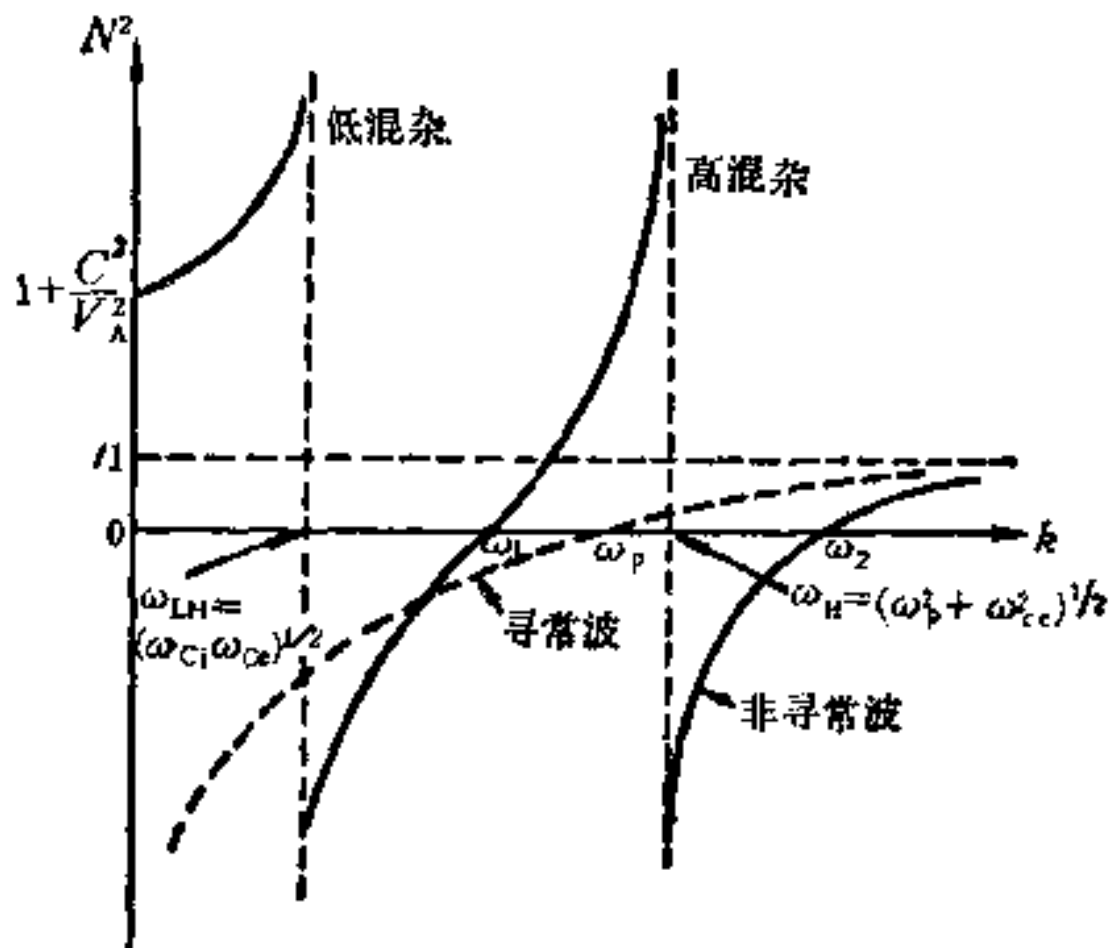


图2.7.2 磁化“冷”等离子体中垂直于磁场方向传播($\theta=\pi/2$)的电磁波的折射率平方和频率的关系($\omega_{pe} > \omega_{ce}$)

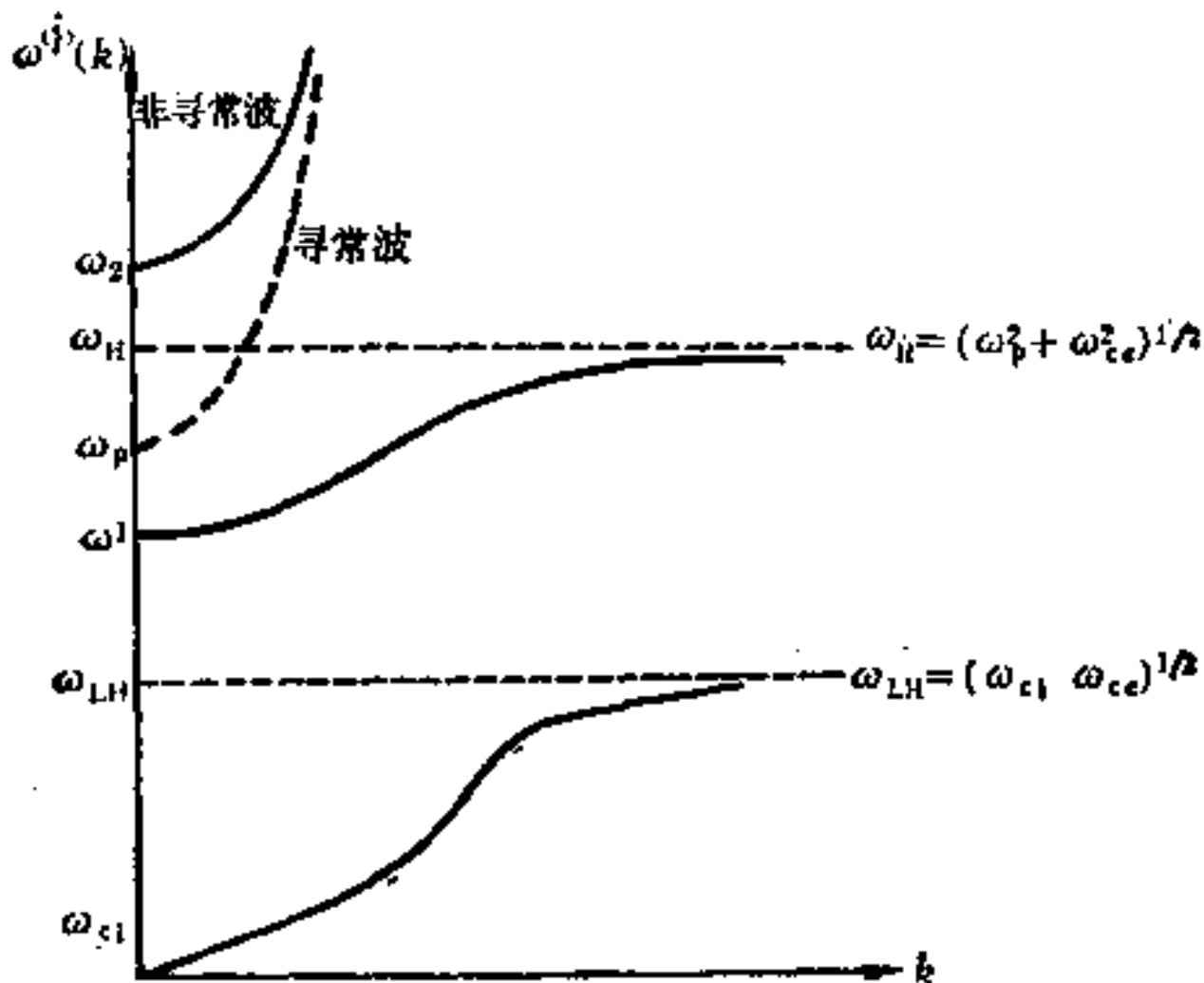


图2.7.3磁化“冷”等离子体中垂直于磁场方向传播($\theta=\pi/2$)的电磁波的振荡频率和波数的关系($\omega_{pe} > \omega_{ce}$)

2.8. 在具有压力各向异性的等离子体中传播的磁流体波

由于磁场的作用，实际情况下的压力是各向异性的，即沿着磁场方向的压力和垂直于磁场方向的压力不相等。

从微观理论知道压力张量的定义如下

$$p_{ik} = \sum_{\alpha} m^{\alpha} \int v_i v_j f(r, v, t) d^3 v - U_i U_j \sum_{\alpha} m^{\alpha} n^{\alpha} \quad [2.8.1]$$

其中第一项是动量传输张量， U_i 和 U_j 是质心速度的第 i 个和第 j 个个分量，质心速度由下式给出

$$U = \frac{\sum_{\alpha} m^{\alpha} \int v f(r, v, t) d^3 v}{\sum_{\alpha} m^{\alpha} n^{\alpha}} \quad [2.8.2]$$

一般讲 $\mathbf{p}$ 有 9 个元素

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} \quad [2.8.3]$$

但是，由于对称性实际只有 6 个变量。对其元素的计算决定于分布函数。

在一定的条件下 $\mathbf{p}$ 的张量形式可以简化，在流体坐标系中仅有一种流体的非对角元素表示为

$$p_{xy} = m \int v_x v_y f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) dv_x dv_y dv_z \quad [2.8.4]$$

若取 $\mathbf{B}_0$ 沿着 z 方向，则根据洛仑兹力方程得到 $v_x = v_{\perp} \cos(\omega_c t + \alpha)$ 和 $v_y = v_{\perp} \sin(\omega_c t + \beta)$ 。其中 ω 是回旋频率， α 和 β 是粒子的相位，由初始条件来确定。因此，平均值 $\langle v_x v_y \rangle$ 是粒子的相位对整个分布函数求平均的效果。

当平均值 $\langle v_x v_y \rangle = 0$ 时，其对应分布函数就叫回旋各向同性。当平均值 $\langle v_x v_y \rangle \neq 0$ 时，其对应分布函数就叫回旋各向异性。在粒子为回旋各向同性分布时，其相位是任意的并且不被修正。在粒子为回旋各向异性分布时，其相位是要被修正。现在若取粒子的分布函数为速度空间各向同性，即

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f(\mathbf{r}, v^2, t) \quad [2.8.5]$$

时，从函数的奇偶特性知道这时 $\langle v_x v_y \rangle = 0$ 。因此，这种粒子速度分布条件下流体的压力张量的非对角元素为零，只有对角元素。

若仍取 $\mathbf{B}_0$ 沿着 z 方向，令 $v_\perp$ 和 $v_\parallel$ 分别代表粒子垂直于磁场和平行于磁场的速度，这时压力张量可以写为

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_\perp & 0 & 0 \\ 0 & p_\perp & 0 \\ 0 & 0 & p_\parallel \end{pmatrix} \quad [2.8.6]$$

其中标量压力 $p_\perp$ 和 $p_\parallel$ 定义如下

$$p_{\perp} = m \int v_{\perp}^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad [2.8.7]$$

$$p_{\parallel} = m \int v_{\parallel}^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad [2.8.8]$$

方程[14.8.6]可以写为

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\parallel} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{\parallel} - p_{\perp} \end{pmatrix} \quad [2.8.9]$$

从矢量角度看，具有下列形式：

$$\mathbf{p} = p_{\perp} \mathbf{I} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{b}\mathbf{b} \quad [2.8.10]$$

其中 $\mathbf{I}$ 是单位张量， $\mathbf{b}\mathbf{b}$ 是一个二阶张量。

如果磁场 $\mathbf{B}$ 是弯曲的，其指向的空间变化就应当考虑近来。 $\nabla \mathbf{b}$ 一般不为零。方程[14.8.10]可以写为张量形式

$$p = p_{\perp} \mathbf{I}_{ij} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{b}_i \mathbf{b}_j \quad [2.8.11]$$

在任意参照系中压力张量可以写为：

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{b}_x \mathbf{b}_x & (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{b}_x \mathbf{b}_y & (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{b}_x \mathbf{b}_z \\ (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{b}_y \mathbf{b}_x & p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{b}_y \mathbf{b}_y & (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{b}_y \mathbf{b}_z \\ (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{b}_z \mathbf{b}_x & (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{b}_z \mathbf{b}_y & p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{b}_z \mathbf{b}_z \end{pmatrix} \quad [2.8.12]$$

在上式中每一项对于不同的空间位置都要求单位矢量的详细信息。因此，求解相当复杂。

压力张量的散度可以写为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{p} &= \nabla \cdot p_{\perp} \mathbf{I} + \nabla \cdot (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{b} \mathbf{b} \\ &= \nabla p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \nabla \cdot \mathbf{b} \mathbf{b} + \mathbf{b} (\mathbf{b} \cdot \nabla) (p_{\parallel} - p_{\perp}) \\ &= \nabla p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) [(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{b})] + \mathbf{b} (\mathbf{b} \cdot \nabla) (p_{\parallel} - p_{\perp}) \end{aligned} \quad [2.8.13]$$

事实上 $\mathbf{b} (\mathbf{b} \cdot \nabla) p_{\perp} = \mathbf{0}$ 。

注意 $\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0$, 但 $(\nabla \cdot \mathbf{b}) \neq 0$ 。令 $\nabla = \nabla_{\perp} + \nabla_{\parallel}$ ，注意 $\nabla_{\parallel} = \mathbf{b} (\mathbf{b} \cdot \nabla)$ ，上式左边可以重写为 $\nabla \cdot \mathbf{p} = \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{p} + \nabla_{\parallel} \cdot \mathbf{p}$ 。因此，方程[2.8.13]变换为

$$\nabla_{\parallel} \cdot \mathbf{p} = \nabla_{\parallel} p_{\parallel} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{b}) \quad [2.8.14]$$

和

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{p} = \nabla_{\perp} p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} \quad [2.8.15]$$

$$(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) b^2 = 0$$

[2.8.15]式第二项的根据来自于单粒子轨道理论中关于曲率半径的变化和磁场方向变化的求极限知识。

对于只含各向异性压力和洛伦兹力的运动方程 $\rho d\mathbf{u}/dt = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ 而言，就变成分别关于的垂直于磁场方向和平行于磁场方向的两个运动方程：

$$\rho du_{\parallel}/dt = \nabla_{\parallel} p_{\parallel} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) (\nabla \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b} \quad [2.8.16]$$

$$du_{\perp}/dt = \nabla_{\perp} p_{\perp} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad [2.8.17]$$

假定等离子体是无粘性和理想导电的，且是不可压缩的，根据方程[2.8.16]和[2.8.17]略去全部耗散项之后的理想磁流体力学方程

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad [2.8.18]$$

$$\rho d\mathbf{u}_{\parallel} / dt = -\nabla_{\parallel} p_{\parallel} + (p_{\perp} - p_{\parallel}) (\nabla B / B)_{\parallel} \quad [2.8.19]$$

$$\rho d\mathbf{u}_{\perp} / dt = -\nabla_{\perp} (p_{\perp} + B^2 / \mu_0) + [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} / \mu_0] [(p_{\perp} - p_{\parallel}) / (B^2 / \mu_0) + 1] \quad [2.8.20]$$

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad [2.8.21]$$

上式用到了 $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla B^2 / \mu_0 + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} / \mu_0$ ，并设 $\mathbf{B}_0$ 的方向为 z ， $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t)$ ， $\mathbf{u}_0 = 0$ 。

当考虑波沿着磁场传播时，认为 $\partial/\partial x=\partial/\partial y=0$ ，并且从 $\nabla \cdot \mathbf{B}=0$ 和 $\nabla \cdot \mathbf{u}=0$ 知道， $\mathbf{B}_1 \parallel \mathbf{u}_\perp \perp \mathbf{B}_0$ 方程[2.8.21]和方程[2.8.22]变为

$$\rho \partial \mathbf{u}_\perp / \partial t = \alpha B / \mu_0 \partial \mathbf{B}_1 / \partial z \quad [2.8.22]$$

$$\partial \mathbf{B}_1 / \partial t = B_0 \partial \mathbf{u} / \partial z \quad [2.8.23]$$

其中 $\alpha = [(p_\perp - p_\parallel) / (B^2 / \mu_0) + 1]$ 。合并上两个方程得到

$$\partial^2 \mathbf{u}_\perp / \partial t^2 = \alpha v_A^2 \partial^2 \mathbf{u}_1 / \partial z^2 \quad [2.8.24]$$

上式显然是一个 α 因子修正的阿尔芬波动方程。其相速度关系为

$$V_p^2 = \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 = \alpha v_A^2 = \frac{1}{\rho} \left(\frac{B^2}{\mu_0} + p_\perp - p_\parallel \right) \quad [2.8.25]$$

在上式中的下标 0 被去掉，以便代表普遍性。当 $\alpha=1$ 时，上式就是阿尔芬波色散关系。在处于压力各向异性的磁流体中，波传播速度比在各向同性的磁流体要么快，要么慢，决定于 $p_{\perp}$ 是大于还是小于 $p_{\parallel}$ 。

对于斜传播的普遍情况，我们令 $\mathbf{k}=\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{k}_{\perp}$ 且平面波解的形式是 $\exp[i(\omega t - \mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{x} - k_{\parallel} z)]$ 。波在x-z平面传播。在这种条件下，从方程[2.8.18]—[2.8.21]得到：

$$\left. \begin{aligned} [\omega^2 \rho - k_{\perp}^2 (2p_{\perp} + \frac{B^2}{\mu_0}) - k_{\parallel}^2 (p_{\perp} - p_{\parallel} + \frac{B^2}{\mu_0})] u_x + k_{\parallel} k_{\perp} p_{\perp} u_z &= 0 \\ (\omega^2 \rho - 3k_{\parallel}^2 p_{\parallel}) u_z + k_{\parallel} k_{\perp} p_{\perp} u_x &= 0 \end{aligned} \right\} [2.8.26]$$

由上得到

$$\begin{vmatrix} \omega^2 \rho - k_{\perp}^2 (2p_{\perp} + \frac{B^2}{\mu_0}) - k_{//}^2 (p_{\perp} - p_{//} + \frac{B^2}{\mu_0}) & k_{//} k_{\perp} p_{\perp} \\ k_{//} k_{\perp} p_{\perp} & \omega^2 \rho - 3k_{//}^2 p_{//} \end{vmatrix} = 0 \quad [2.8.27]$$

令 $k_{//} = k \cos \theta$ 和 $k_{\perp} = k \sin \theta$ ， θ 是波矢 $\mathbf{k}$ 与磁场 $\mathbf{B}$ 的夹角。再令 $v_p = \omega/k$ 。解上式得到

$$v_p^4 - b v_p^2 + c = 0 \quad [2.8.28]$$

这里

$$\begin{cases} b = \frac{[\frac{B^2}{\mu_0} + p_{\perp}(1 + \sin^2 \theta) + 2p_{//} \cos^2 \theta]}{\rho} \\ c = \frac{1}{\rho^2} \{ 3p_{//} \cos^2 \theta [\frac{B^2}{\mu_0} + p_{\perp}(1 + \sin^2 \theta) - p_{//} \cos^2 \theta] - p_{\perp}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \} \end{cases}$$

[2.8.29]

由此得到这种波的一般情况下的普遍色散关系为

$$v_p^2 = \frac{1}{2\rho} \left\{ \frac{B^2}{\mu_0} + p_{\perp} + 2p_{\parallel} \cos^2 \theta + p_{\perp} \sin^2 \theta \pm \left[\left(\frac{B^2}{\mu_0} + p_{\perp} (1 + \sin^2 \theta) - 4p_{\parallel} \cos^2 \theta \right)^2 + 4p_{\perp}^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right]^{1/2} \right\} \quad [2.8.30]$$

对于 $\theta=0$ ，从上式获得

$$\begin{aligned} v_p^2 &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{B^2}{\mu_0} + p_{\perp} - p_{\parallel} \right) \quad (\text{对应上式中}\pm\text{取于}+号) \\ &= \frac{3p_{\parallel}}{\rho} \quad (\text{对应上式中}\pm\text{取于}-号) \end{aligned} \quad [2.8.31]$$

第一个解与[2.8.25]式一样。第二个解对应于离子声波。

对于 $\theta=\pi/2$ ，从上[2.8.30]式获得

$$v_p^2 = \frac{1}{\rho} \left(\frac{B^2}{\mu_0} + 2p_{\perp} \right) \quad [2.18.32]$$

上式是 $\gamma=2$ 时的磁声波的色散关系。

注意上面所讲公式中的值都是在等离子体处于平衡时所取得的值。对于一般的角度 θ （ $\theta \neq 0$ ， $\theta \neq \pi/2$ ），上面所讲的波是阿尔芬波和磁声波的混合模。

2.9. 非均匀等离子体中的低频漂移波

在非均匀等离子体中，如果磁化等离子体存在密度梯度和或温度梯度，从单粒子轨道理论知道粒子会有漂移。同时将激发等离子体波，这些波以约等于离子体漂移速度的相速度横越磁场移动，称之为漂移波（等离子体动力论也会讲到）。

这些漂移波的重要性在于：任何等离子体都有某些非均匀区，这个区域有能力产生漂移运动及与之有关的漂移波。

等离子体的介电性质因加上磁场而改变。在有压强梯度的等离子体中，介电性质会进一步发生变化是不足为奇的。作为一个例子，考虑接近均匀磁场 $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$ ， $E_0 = 0$ 中的低压强等离子体：

[2.9.1]

$$\frac{m_e}{m_i} \ll \frac{8\pi n k T_e}{B^2} \ll 1$$

并且假定等离子体密度沿 x 方向变化，同时还假定温度是不变的。这种系统的几何图形示于图2.9.1中。

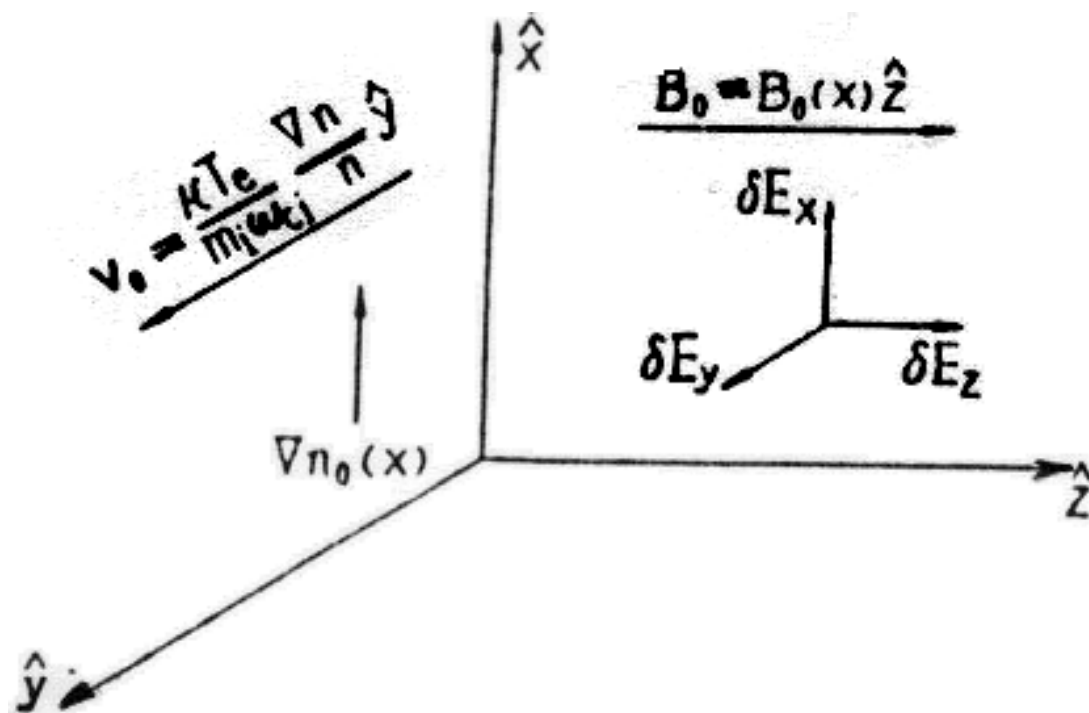


图2.9.1 选自约束等离子体的典型形态，约束场 $B_0 \hat{z}$ 维持一密度梯度 ∇n ，并导致等离子体的运动。这种平衡对有如图所示的 $\delta \mathbf{E}$ 和 $\delta \mathbf{B}$ 的低频漂移波是不稳定的。

为简单起见，令离子是冷的，那么电子的平衡方程是

$$0 = -e \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{c} - \frac{\nabla p_e}{n_e} \quad [2.9.2]$$

它给出具有压强梯度的电子流的平衡漂移速度：

$$\mathbf{V}_0 = -\frac{kT_e}{m_e \omega_{ce}} \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx} \hat{y} \quad [2.9.3]$$

如果平衡受到扰动，这种扰动将依照流体方程发展：

$$n_a m_a \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \bullet \nabla \mathbf{V} \right)_a = n_a q_a \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{c} \right)_a - \nabla p_a \quad [2.9.4]$$

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \nabla \bullet n_a \mathbf{V}_a = 0 \quad [2.9.5]$$

$$\nabla \bullet \mathbf{E} = 4\pi \sum_a q_a n_a \quad [2.9.6]$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_a n_a q_a \mathbf{V}_a \quad [2.9.7]$$

其中 α 等于 e , i , 分别代表电子和离子。12个方程组成的这个方程组14个未知数（其中电子和离子是分别列出方程的），可以用状态方程组封闭。直接解这些方程是困难的；然而，在适当的近似下，解析的困难程度会大大减小。

静电漂移波

当沿磁场的相速度很低时,

$$\frac{\omega}{k_z} \ll V_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi n_i m_i}} \quad .[2.9.8]$$

这种波不扰动磁场，因此是一种好的近似

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad [2.9.9]$$

对于这些慢波，电子沿磁力线热化，并且遵循线性化的玻耳兹曼分布：

$$n = n_0 e^{e\phi/kT} \approx n_0 \left(1 + \frac{e\phi}{kT} \right) \quad [2.9.10]$$

因此

$$n_1 = n_0 \frac{e\phi}{kT}$$

一种进一步的简化是取所有扰动量的形式为 $n_1 = \hat{n}_1 e^{i(k_y y + k_z z - \omega t)}$ 。这就仅限于yz平面内传播的波进行分析。这些波可以检验这种等离子体状态的两个基本特征，即梯度引起y方向的漂移和粒子在z方向（沿磁场）的自由流动。在这些限制条件下，方程[2.9.4]和[2.9.5]给出

$$-i\omega \mathbf{V}_i = -i\mathbf{k}\phi \frac{e}{m_i} + \frac{e}{m_i c} (\mathbf{V}_i \times \mathbf{B}_0) \quad [2.9.11]$$

$$-i\omega n_i + n_0 i\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_i - V_{ix} \frac{dn_0}{dx} = 0 \quad [2.9.12]$$

由此导出

$$\begin{aligned}\frac{n_i}{n_0} &= \left(\frac{-ek_z}{m_i \omega_{ci} \omega} \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx} + \frac{ek_z^2}{m_i \omega^2} \right) \phi \\ &= \left(\frac{k_y V_0}{\omega} + \frac{k_z^2 c_s^2}{\omega^2} \right) \frac{e\phi}{kT_e}\end{aligned}$$

其中

$$c_s = \sqrt{\frac{kT_e}{m_i}}$$

是离子声速。其次泊松方程给出

$$\varepsilon(k, \omega) k^2 \phi = 0$$

连同[2.9.6]给出

$$\varepsilon(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 c_s^2} \frac{\omega^2 - \omega k_y V_0 - k^2 c_s^2}{\omega^2} \quad [2.9.13]$$

$\varepsilon(k, \omega) = 0$ 的根给出低频纵向漂移波的色散关系。对于长波模 $k^2 c_s^2 < \omega_{pi}^2$ ，色散关系是

$$\omega^2 - \omega k_y V_0 - k_z^2 c_s^2 = 0 \quad [2.9.14]$$

当 $V_0 \rightarrow 0$ 或 $k_y = 0$ 时，这些波正好就是早先讨论过的离子声波。当 $k_z \rightarrow 0$ 时，有两个根， $\omega_1 = k_y V_0$, $\omega_2 = -k_z^2 c_z^2 / k_y V_0$ （对方程进行泰勒展开）。对于比较大 k_z 的，象图2.9.2中所示的那样，这些漂移波就作为一个加速离子声模和一个延迟离子声模而出现：

$$\omega = \frac{k_y V_0}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{k_y^2 V_0^2 + 4k_z^2 c_z^2} \quad [14.19.15]$$

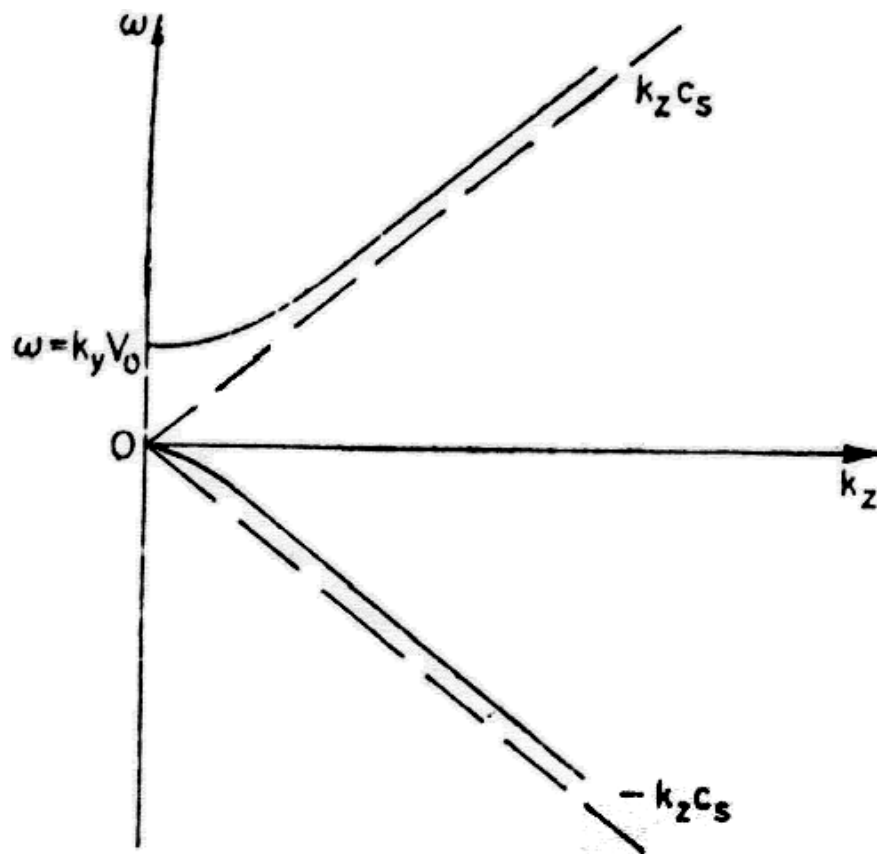


图2.9.2 密度梯度引起对离子声波的修正它的一个分支是加速模，另一个分支是延迟模。对于很长的波长($k_z \rightarrow 0$) 加速波退化成一个纯漂移波 $\omega = k_y V_0$ 在均匀等离子体中，没有与它配对的模。

当 $k_z = 0$ 时，上面一个模的横向相速度是——电子漂移速度 $\omega/k \rightarrow V_0$ 。对非均匀性的效应的一种看法如下：一般，与 $\mathbf{B}$ 交叉的电场引起漂移：

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} c$$

如果 $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{E}} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)](\mathbf{k}/k)$ ，它就满足{在 $\mathbf{V} = \hat{\mathbf{V}} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$ 下}

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_1 = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_1 = i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{B}) \frac{\hat{E}}{kB^2} c = 0 \quad [2.9.16]$$

在均匀等离子体中，满足 $\nabla \cdot \mathbf{V}_1 = 0$ 的流体特点也意味着没有扰动密度 ($\partial n_1 / \partial t = n_0 \nabla \cdot \mathbf{V}_1$)，即相应于不可压缩流体。在非均匀等离子体中，即使流体是不可压缩的，也可以有密度扰动。如果 $\nabla \cdot \mathbf{V}_1 = 0$ ，根据方程[2.9.12]密度扰动是

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = V_{1x} \frac{\partial n_0}{\partial x} \quad [2.9.17]$$

于是，等离子体沿密度梯度方向的位移引起密度变化。发生密度变化的原因是，一团低密度等离子体因 $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ 的漂移而运动到比较高的平衡密度区内。

结束语

对磁流体方程组进行平面波 $\Phi e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ 的线性展开，得到扰动量的一阶方程组，通过依次代入将此方程组简化为关于一个物理矢量含其三个分量的线性方程组。根据系数行列式为零的条件就可以求出关于频率 ω 和 $\mathbf{k}$ 波数（不含物理扰动量）的色散关系。比如对于关于速度扰动的分量方程；有

$$a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 = 0$$

$$a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 = 0$$

$$a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 = 0$$

其中 $a_{ij} = a_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \Phi_0)$, $i=1,2,3$, $j=1,2,3$

作业：

试列表归纳等离子体(磁流体动力论) 波的名称、产生条件（冷、热，磁场，各向同性）、方向条件（ $\mathbf{KBE}$ ）、色散关系。

第三章

磁流体力学激波

各小节内容

- 3.1. 磁流体力学激波方程
- 3.2. 平行于磁场方向传播的稳态平面激波
- 3.3. 垂直于磁场方向传播的稳态平面激波
- 3.4. 边界层与间断面的分类
- 3.5. 激波与角度的关系
- 3.6. 粒子在激波附近的加速

3.1. 流体力学激波方程

在通常的流体中，小扰动以声速传播。由上一章节讨论知道，在磁场中的导电流体里，除了声波外还产生阿耳文波、磁声波、回旋波、哨声波等静电和电磁波以及它们的混杂波。在数学上，这种小扰动过程相应于线性流体方程的连续解。

但是，如果在流体中产生了大幅度扰动，它的传播现象同小扰动比较就很不相同。大幅度扰动在流体中形成流体变量的**间断面**，其上流体速度、压强、密度和温度发生急剧的、跳跃式的变化，同时伴随着压缩和加热，并以超过声速的速度传播。这种相对流体运动着的间断面就叫作流体力学激波。数学上，激波相应于流体运动方程的不连续解。

为了叙述简单，我们举一个活塞运动为例来说明激波的形成。设在装有活塞的管道中使起初不动的活塞进入运动状态(图3.1)，自某瞬刻开始活塞将以速度 u 运动。这个运动传递给管内的静止气体并不是一瞬刻发生的。为了克服活塞前面气体的阻力，活塞所施压力必须由 p_0 (未受扰动气体压强)增加到 p ，这个压强扰动先使活塞前面邻近的气体挤紧起来达到压强 p 和速度 u ，并在未受扰动气体中传播，图3.1.1中表示了其传播的过程，自某瞬刻C点的速度等于静止气体中的声速 C_s ，B点的波速大于C点的波速(因为声速随压力增大而增大，并且B点的流速大于C点的流速)，因而B点将追上C点。波阵面BC的倾斜程度随扰动的移动而增大起来。当这种倾斜程度接近于铅直线的时候， u 、 p 、 ρ 对 x 的微商变成无穷大，形成流体变量的间断面。是实际上由于存在耗散效应(摩擦，热传导)，流体变量梯度不可能任意大。例如波阵面变陡时横越波阵面的温度梯度增大，因而热传导也随之增加，直到建立定常状态为止。耗散越小，激波越接近于间断面。在非导电流体中，只有通过碰撞才能建立新的平衡态，因此流体力学激波的厚度大约是粒子平均自由程的量级。

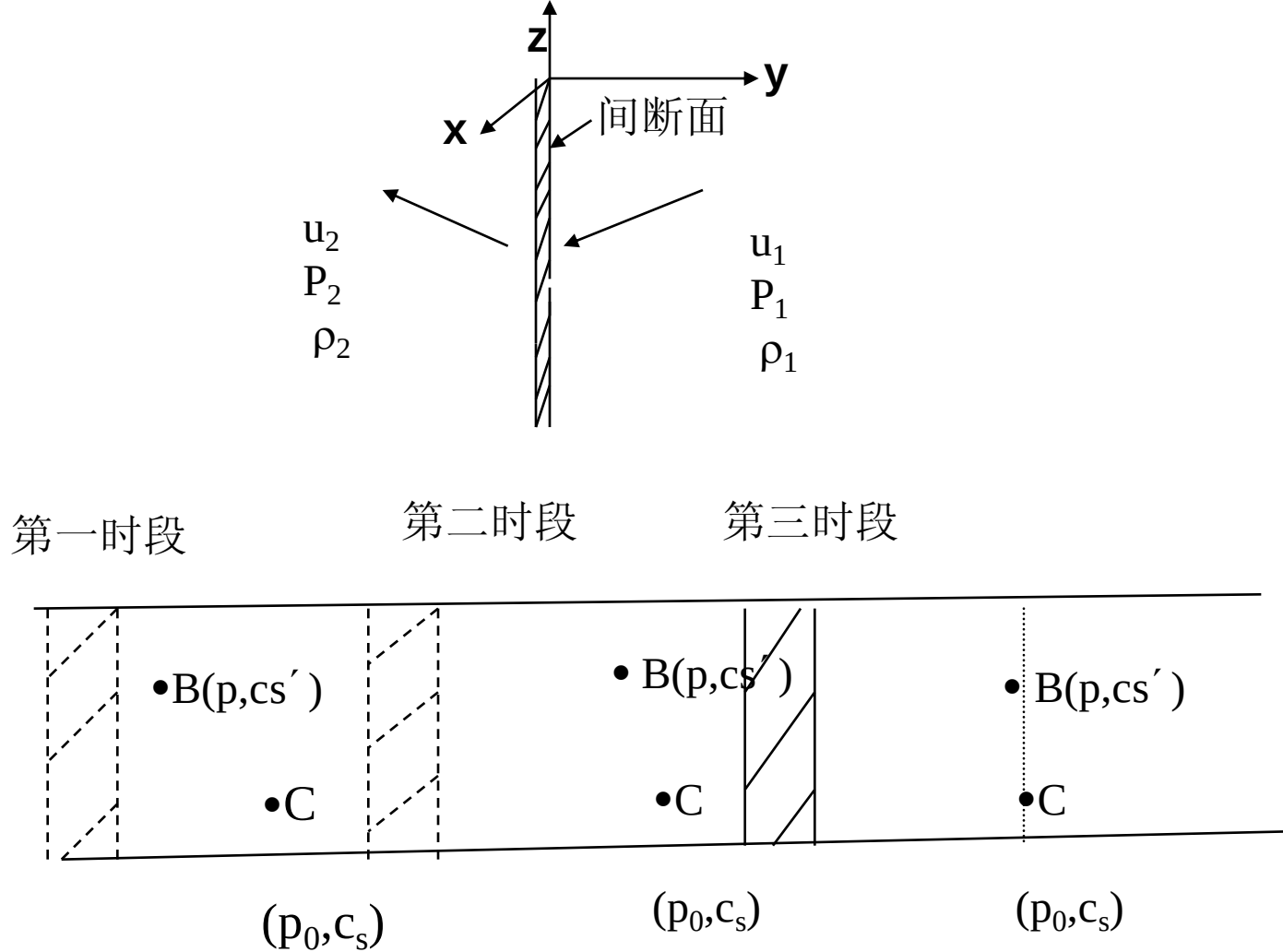


图3.1.1 激波的形成

磁流体力学激波照例要比流体力学激波复杂得多。磁场中的导电流体中，除了通常的激波外，还可能产生其它模式。从上章我们知道，磁流体力学波有**快**，**中间**和**慢**三种模式。中间模式纯粹是横波，不会变陡而形成激波；快、慢模式一般既有横向分量也有纵向分量，纵分量是压缩波，可形成激波。另外，磁流体力学激波的结构比通常的激波更复杂。除摩擦和热导外，有限电导率引起的焦耳热提供了又一种耗散机理。特别是，等离子体中能产生**无碰撞激波**，这种激波的厚度小于粒子的最小平均自由程。最后，从上章知道，在导电流体中垂直于磁场传播的压缩波的传播速度是 $(c_s^2 + v_A^2)$ ，其中 c_s 为局部声速， v_A 是阿耳文速度。因此可以预计，当流体流动方向垂直于磁场时，只有流动速度大于磁声波速度才能形成激波。一般来说，磁场的作用是引起感应电流，从而影响激波前后流体的动量和能量平衡。

为了描述激波里发生的流体从一种状态到另一种状态的转变，我们只要考虑通过间断面的质量、动量和能量守恒定律就可以了。流体内的耗散力主要影响激波的结构和形状，因此确定激波前后状态之间的关系时可以忽略它们。设取和间断面一起运动的坐标系，并考虑间断面上的一小面元，其上作高度为 h ，底面积为 Σ 的小棱柱。现将所作棱柱的体积和面积作为积分形式的流体运动方程[1.8.5]的积分体积和积分面积，并取 $h \rightarrow 0$ 的极限，则得如下关系：

$$\left[\rho u_n \right] = \left[\Pi_n \right] = \left[S_n \right] = 0$$

即

$$\left[\rho u \right] = 0$$

$$\left[\rho u_n u - P_n - T \cdot n \right] = 0 \quad [3.1.1]$$

$$\left[\rho u_n (\varepsilon + u^2/2) + q_n - P_n + s_n \right] = 0$$

同时从麦克斯韦方程得到

$$\left[E_t \right] = \left[B_n \right] = 0 \quad [3.1.2]$$

这里的黑花括号表示间断面两侧相应物理量之差。[3.1.1]和[3.1.2]式乃是磁流体力学中间断面上满足的一般条件。

对于理想导电流体，[3.1-1]和[3.1.2]式变面如下形式：

$$\left. \begin{aligned} \left[\rho \mathbf{u} \right] &= 0 \\ \left[\rho u_n \mathbf{u} - \mathbf{P} \mathbf{n} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \right] &= 0 \\ \left[\rho u_n \left(\varepsilon + u^2/2 \right) + p u_n + (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_n / \mu_0 \right] &= 0 \\ \left[E_t \right] = \left[B_n \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [3.1.3]$$

并且

$$\mathbf{E} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{T} = \mathbf{B}\mathbf{B}/\mu_0 - B^2 \mathbf{I} / 2\mu_0$$

为了把它们写成更方便的形式，对其中的几项进行如下变换：

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{B}B_n/\mu_0 - B^2 \mathbf{n} / 2\mu_0 \\ &= \mathbf{B}B_n/\mu_0 - (B_n^2 + B_t^2) \mathbf{n} / 2\mu_0 \\ &= \mathbf{B}_t B_n / \mu_0 + B^2 \mathbf{n} / 2\mu_0 - B_t^2 \mathbf{n} / 2\mu_0 \\ (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_n / \mu_0 &= -1/\mu_0 [(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{n} \\ &= -1/2\mu_0 [\mathbf{B}_n(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) - B^2 u_n] \end{aligned}$$

从关系式 $\mathbf{[E_t]} = \mathbf{[(u \times B)_t]} = 0$ 得到

$$\mathbf{[B_n u_t - B_t u_n]} = 0$$

把所得到的表达式代入[3.1.3]式，并将矢量关系式投影到间断面的法平面和切平面上去，就得到磁流体力学间断面上满足的如下条件(家庭作业)：

$$\rho_1 u_{n1} = \rho_2 u_{n2} = G \quad [3.1.4a]$$

$$B_{1n} = B_{n2} = B_n \quad [3.1.4b]$$

$$B_n \mathbf{[u_t]} = \mathbf{[B_t u_n]} \quad [3.1.4c]$$

$$\mathbf{[p + \rho u_n^2 + (B_t^2 - B_n^2)/\mu_0]} = 0 \quad [3.1.4d]$$

$$\mathbf{[\rho u_n u_t - B_n B_t / \mu_0]} = 0 \quad [3.1.4e]$$

$$\mathbf{[\rho u_n (\varepsilon + u^2/2) + p u_n + B^2 u_n / \mu_0 - B_n^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})_n / \mu_0]} = 0 \quad [3.1.4f]$$

或者利用G和 B_n 的连续性，[3.1.4c~4f]也可以写成如下形式：

$$B_n [\mathbf{u}_t] = [B_t u_n] \quad [3.1.5]$$

$$[\mathbf{p}] + G^2 [\mathbf{V}] + [\mathbf{B}_t^2] / 2\mu_0 = 0 \quad [3.1.6]$$

$$G [\mathbf{u}_t] = B_n / \mu_0 [\mathbf{B}_t] \quad [3.1.7]$$

$$G [h + G^2 V^2 / 2 + u_t^2 / 2 + V B_t^2 / \mu_0] = B_n [\mathbf{B}_t \cdot \mathbf{u}_t] / \mu_0 \quad [3.1.8]$$

其中 $V = 1/\rho$ 为比容， $h = \varepsilon + p/\rho$ 为单位质量流体的焓

上述式可以用来描述各种类型的间断面。激波是如下的间断：

$$G \neq 0, [\mathbf{V}] \neq 0 \quad [3.1.9]$$

其特征是存在密度跃变和流体通过间断面（ u_{n1} 和 u_{n2} 不为零）。

磁场的法向分量一般说来不为零，但在特殊情况下，也可能有 $B_n = 0$ 。

从[3.1.5]和[3.1.7]消去 u_t ，得到

$$[\mathbf{V} \mathbf{B}_t] = B_n^2 / (2G^2 \mu_0) [\mathbf{B}_t^2] \quad [3.1.10]$$

或者

$$[B_n^2 / (2G^2 \mu_0) - V_2] \mathbf{B}_{t1} = [B_n^2 / (2G^2 \mu_0) - V_1] \mathbf{B}_{t2} \quad [3.1.10']$$

由此可以得出，对于激波， $\mathbf{B}_{t1}$ 和 $\mathbf{B}_{t2}$ 平行，也即矢量 $\mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{B}_2$ 与表面的法线在同一平面内。另外从[3.1.7]知道，速度跃变 $\mathbf{u}_{t2}-\mathbf{u}_{t1}$ 平行于 $\mathbf{B}_{t2}-\mathbf{B}_{t1}$ ，因此 $\mathbf{u}_{t2}-\mathbf{u}_{t1}$ 和 $\mathbf{B}_{t1}$ ， $\mathbf{B}_{t2}$ 在同一平面上。显然，对普遍性无任何限制我们可以假定，矢量 $\mathbf{u}_1$ 和 $\mathbf{u}_2$ 也在同一平面内。由此可见，激波内的运动按其本质来说是平面运动。

现在引进一个关系式，对于磁流体力学中的激波所引起的作用和通常流体力学中的雨果尼特（Hugoniot）绝热关系相同。先从[3.1.8]式消去 u_t ，利用[3.1.10]得到的 G^2 （注意已证明 $\mathbf{B}_{t1}$ 和 $\mathbf{B}_{t2}$ 平行故可以用 $\mathbf{B}_t$ 和代替 $\mathbf{B}_t$ ）和由[3.1.6]式得到的 G^2 ，

即

$$G^2 = \frac{p_2 - p_1 + \frac{1}{2\mu_0}(B_{t2}^2 - B_{t1}^2)}{V_2 - V_1} \quad [3.1.11]$$

经过运算后得到

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \frac{1}{2}(p_2 + p_1)(V_2 - V_1) + \frac{1}{4\mu_0}(V_2 - V_1)(B_{t2} - B_{t1})^2 = 0 \quad [3.1.12]$$

这就是所要求的**磁流体力学雨果尼特系**。当磁场为零或者 $\mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{B}_2$ 都平行激波传播方向时，[3.1.12]式化成通常流体力学中的**雨果尼特关系**：

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \frac{1}{2}(p_2 + p_1)(V_2 - V_1) = 0 \quad [3.1.13]$$

这些关系式把激波两侧的压力和密度联系了起来，它们的作用与状态绝热变化时 $p\rho^{-\gamma}=\text{常数}$ 所起的作用相同。但是对于激波引起的变化来说，绝热条件不再适用，这是因为出现了耗散过程。

利用激波方程讨论激波之前，我们先来证明激波的压缩性质（即 $p_2 > p_1$ ）。图3.1.2表示(p 、 V)平面上的磁流体力学雨果尼特关系（实线）、流体力学雨果尼特关系（点虚线）和泊松绝热曲线（虚线）。因为[3.1.12]式最后一项当 $V_2 < V_1$ 时为负值，而当 $V_2 > V_1$ 时为正值，故在图上 $V_2 < V_1$ 的区域中满足[3.7.12]式的点位于通常的雨果尼特曲线之上，而在 $V_2 > V_1$ 的区域中满足该方程的点位于雨果尼特绝热曲线之下。另外，已知在一般的流体力学中，在通常的假设下，当 $V_2 < V_1$ 时雨果尼特绝热曲线位于泊松绝热曲线之上，而当 $V_2 > V_1$ 时位于泊松绝热曲线之下。因此，满足磁流体雨果尼特力学关系[3.1.12]的点在 $V < V_1$ 时位于 $S > S_1$ 的区域，而当 $V > V_1$ 时位于 $S < S_1$ 区域。这表明，在通常的假设下，磁流体力学中不可能有稀疏跃变，因为它们相应于熵减少的过程。激波引起的变化是非绝热过程，伴随着耗散和加热，因此根据热力学第二定律知道，激波过程必须引起熵增加。所以，激波只能是稠密跃变，是压缩波。

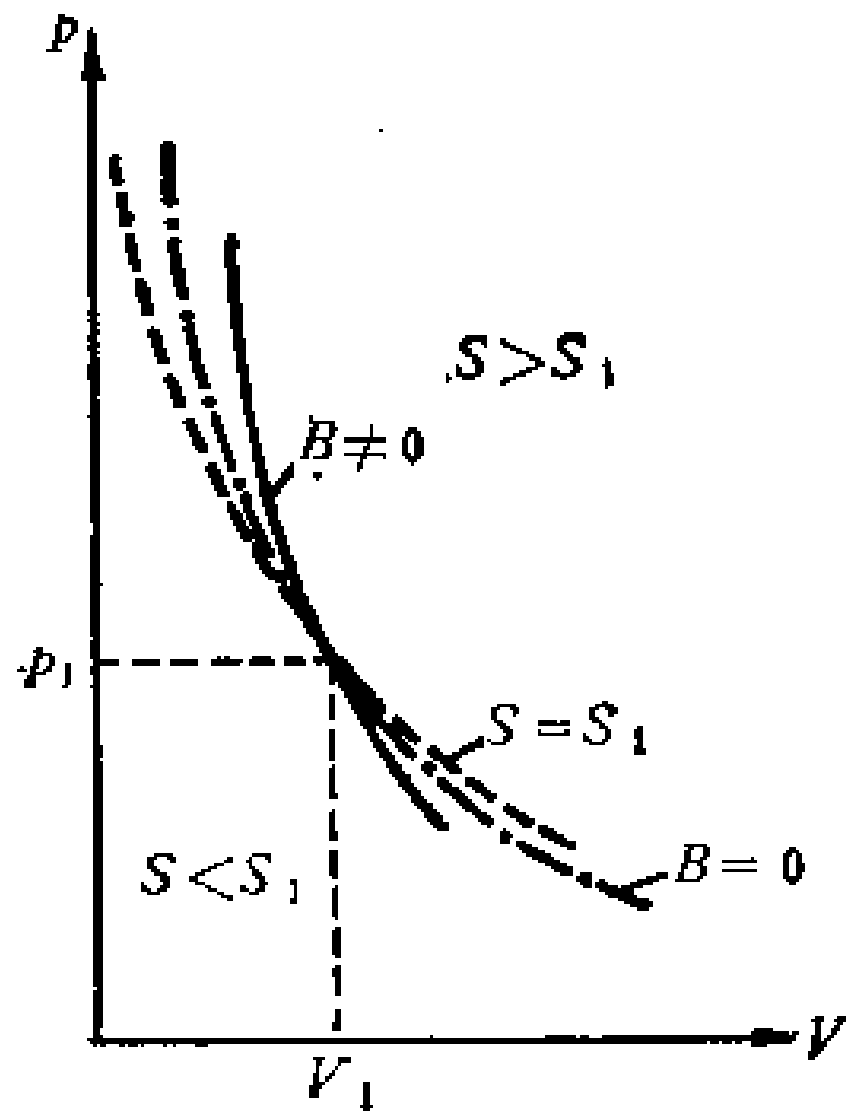


图3.1.2

3. 2平行于磁场方向传播的稳态平面激波

根据激波的基本关系式，下面简略地研究没有磁场或者流动方向和磁场平行时的稳态平面激波。对于一维流动的简单情况方程 [3.1.6]~[3.1.8]变成：

$$\mathbf{p} + G^2 \mathbf{V} = 0$$

$$\mathbf{h} + G^2 \mathbf{V} = 0$$

或者将 $G = \rho_1 u_{n1} = \rho_2 u_{n2}$ ； $V = 1 / \rho$ 和 $h = \varepsilon + p/\rho$ 代入后得到

$$\rho_1 u_{n1} = \rho_2 u_{n2} \quad [3.2.1]$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \quad [3.2.2]$$

$$\varepsilon_1 + p_1/\rho_1 + u_1^2/2 = \varepsilon_2 + p_2/\rho_2 + u_2^2/2 \quad [3.2.3]$$

利用理想气体内能表示式， $\varepsilon = p/(\gamma-1)\rho$ ， [3.2.3]方程可以写成

$$\frac{p_1}{(\gamma-1)\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_2}{(\gamma-1)\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} \quad [3.2.4]$$

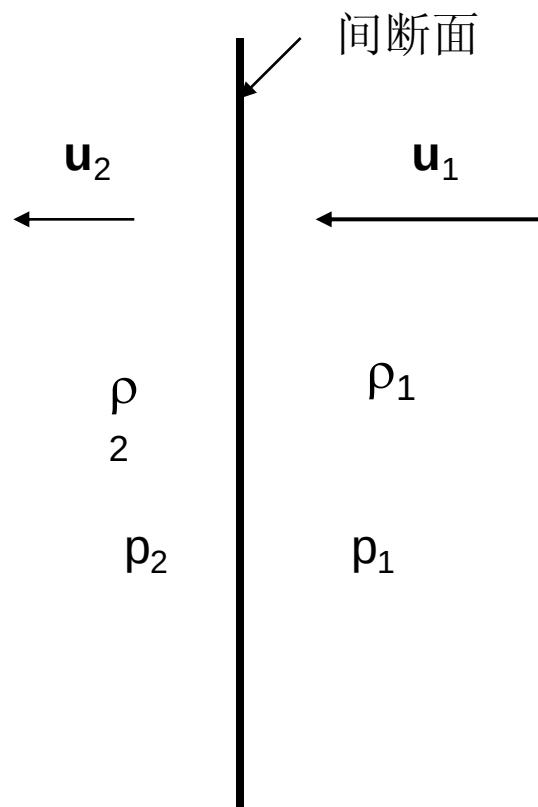


图3.2.1

根据[3.1.1], [3.1.2], [3.1.3]式, 可以从激波前状态的 p_1 , ρ_1 , u_1 (因而 ε_1 可知) 确定激波后状态的 p_2 , ρ_2 , u_2 (因而 ε_2 可知)。

为计算方便, 引进如下记号: $R=p_2/p_1$ (它称作激波强度); $r=\rho_2/\rho_1$; 并且定义马赫数

$$M_1=u_1/c_{s1} \quad [3.2.5]$$

其中 $c_{s1}=(\gamma p_1/\rho_1)^{1/2}$ 为从激波前的局部声速, 则方程[3.2.2]和[3.2.4]分别成为:

$$M_1^2(1-\frac{1}{r})=\frac{R-1}{\gamma} \quad [3.2.6]$$

$$M_1^2(1-\frac{1}{r^2})=\frac{2(\frac{R}{\gamma}-1)}{\gamma-1} \quad [3.2.7]$$

由此可以解得

$$R=\frac{p_2}{p_1}=\frac{2\gamma M_1^2-(\gamma-1)}{\gamma+1} \quad [3.2.8]$$

$$r=\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2+2} \quad [3.2.9]$$

(家庭作业)

从这两个关系式和理想气体状态方程 $p=R\rho T$ ，我们可以求得激波前后的温度比：

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} \quad [3.2.10]$$

激波的传播速度显然等于 $u_1 = M_1 c_{s1}$ 。由[3.2.5]和[3.2.8]式，对于给定的激波强度 p_2/p_1 ，激波传播速度是

$$v_{\text{激}} = M_1 c_{s1} = c_{s1} \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{p_2}{p_1}} \quad [3.2.11]$$

激波后面追随激波的流体质点的绝对速度—伴随运动速度是

$$v_{\text{伴}} = v_{\text{激}} - u_2 = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} c_s \frac{\frac{p_2}{p_1} - 1}{\sqrt{(\gamma - 1) + (\gamma + 1) \frac{p_2}{p_1}}} \quad [3.2.12]$$

在上小节里我们已经证明激波是稠密跃变，即 $p_2 > p_1$ 。因此，由[3.2.11]式可知，激波传播速度必大于声速，激波强度愈大，也即 p_2/p_1 愈大，激波传播速度愈大。随激波强度的减少，激波传播速度趋近于未扰动流体中的声速。

$$v_{\text{激}} = c_{s1}, \quad \text{当 } p_2 = p_1 \text{ 时}$$

由此可见，激波是超声速的，它总会越过未扰动流体中的声波而传播。再由[3.2.12]式我们看到，伴随运动速度总是小于激波传播速度，并且也随着激波强度的增大而增大，在声波的情形（ $p_2 = p_1$ ），伴随运动速度等于零。

从上面我们看到，激波强度愈大，马赫数 M_1 愈大，因此可以利用 M_1 作为激波强度度量。对于 $M_1 \gg 1$ 的强激波，公式[3.2.8]—[3.2.10]可以用如下更为简单的表达式来代替：

$$\frac{p_2}{p_1} \approx \frac{2\gamma M_1^2}{\gamma + 1} \quad [3.2.13]$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} \approx \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad [3.2.14]$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\gamma(\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)^2} \quad [3.2.15]$$

从[3.2.15]式易见，强激波可用来产生高温等离子体或者使激波后的气体温度高到足以引起电离，从而由中性气体产生等离子体。另外，由[3.2.9]可知，无论激波强度多么大，激波产生稠密 ρ_2/ρ_1 不可能超过量 $\gamma+1/\gamma-1$ ，对于 $\gamma = 5/3$ 。此比值是4。

3. 3 垂直于磁场方向传播的激波

现在研究导电流体中垂直于磁场方向传播的稳态平面激波。为简单起见我们还是研究一维情形。这时方程[3.1.5]—[3.1.8]化为

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad [3.3.1]$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 + \frac{B_1^2}{2\mu_0} = p_2 + \rho_2 u_2^2 + \frac{B_2^2}{2\mu_0} \quad [3.3.2]$$

$$\varepsilon_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} + \frac{B_1^2}{\mu_0 \rho_1} = \varepsilon_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} + \frac{B_2^2}{\mu_0 \rho_2} \quad [3.3.3]$$

$$B_1 u_1 = B_2 u_2 \quad [3.3.4]$$

对于理想气体，利用内能的关系式 $\varepsilon = p/(\gamma-1)\rho$ [3.3.3]式可以写成

$$\frac{p_1}{(\gamma-1)\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} + \frac{B_1^2}{\mu_0 \rho_1} = \frac{p_2}{(\gamma-1)\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} + \frac{B_2^2}{\mu_0 \rho_2} \quad [3.3.5]$$

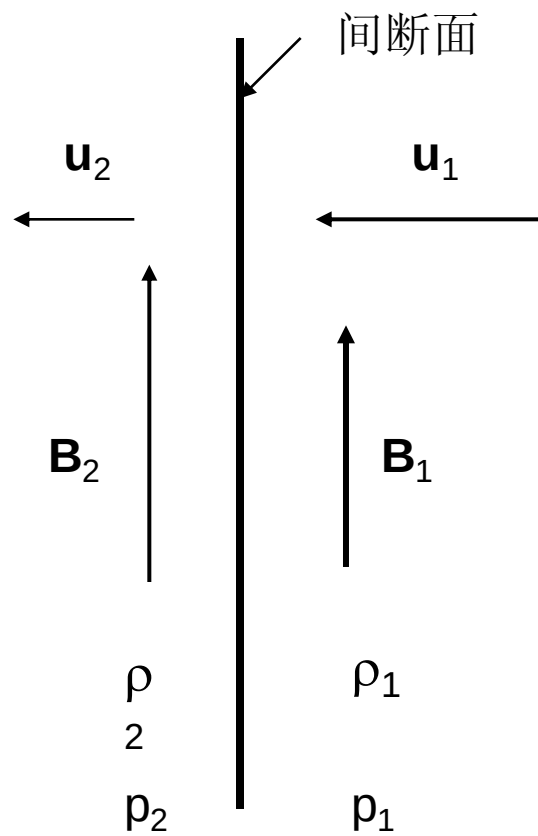


图3.3.1

引进如下记号

$$\left. \begin{aligned} R &= p_2 / p_1 \\ r &= \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{B_2}{B_1} \\ N^2 &= \gamma M_1^2 = \frac{\gamma u_1^2}{c_{s1}^2} \\ A &= \frac{B_1^2}{2\mu_0 p_1} \end{aligned} \right\} \quad [3.3.6]$$

其中A表示可以从激波前的磁压强与气体压强之比(注意在这里A应该与等离子体 β 参数的区分)，相应地，方程[3.3.2]和[3.3.4]式可以分别写为：

$$N^2 \left(1 - \frac{1}{r}\right) = (R - 1) + A(r^2 - 1) \quad [3.3.7]$$

$$N^2 \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{R}{r} - 1\right) + 4A(r - 1) \quad [3.3.8]$$

从这两式中削去R，并屏弃无激波情形的解 $r=1$ ，得到

$$A(2-\gamma) r^2 + [\gamma(A+1) + 1/2(\gamma-1) N^2] r - 1/2(\gamma+1) N^2 = 0 \quad [3.3.9]$$

若 r_1 和 r_2 为此方程的根，那么 $r_1 r_2 = -(\gamma+1) N^2 / [2 A(2-\gamma)]$ 。对于通常所遇到的情形， $\gamma < 2$ ，因此这个关于 r 的二次方程有一个正根和一个负根。后者没有物理意义，故弃去之。如果正根是对应于激波的解，那么必须是 $r > 1$ ，故有

$$1/2(\gamma+1) N^2 > A(2-\gamma) + \gamma(A+1) + 1/2(\gamma-1) N^2 \quad [3.3.10]$$

即

$$N^2 > 2A + \gamma \quad [3.3.11]$$

把 N^2 和 A 的表达式[3.3.6]代入上式后得到

$$u_1^2 > v_{A1}^2 + c_{s1}^2 = v_M^2 \tag{3.3.12}$$

这里 $v_{A1} = B_1 / (\mu_0 \rho_1)^{1/2}$ 是激波前气体中的阿尔芬波速度。式[3.3.12]正是我们预期的结果，这是因为在磁场中的导电流体内横越磁场的压缩波以速度 v_M 传播，而不是以速度 c_{s1} 传播。

磁场的引进使激波强度 p_2/p_1 减少，这是因为流动能量的一部分转化成磁能。设 r_n 为无磁场时由[3.2.9]式得到的 r 值，也即在 $A=0$ 时由方程[3.3.9]得到的值，则方程[3.3.9]可以写成

$$[1/2(\gamma-1) N^2 + \gamma](r-r_n) = -Ar [(2-\gamma)r + \gamma] \tag{3.3.13}$$

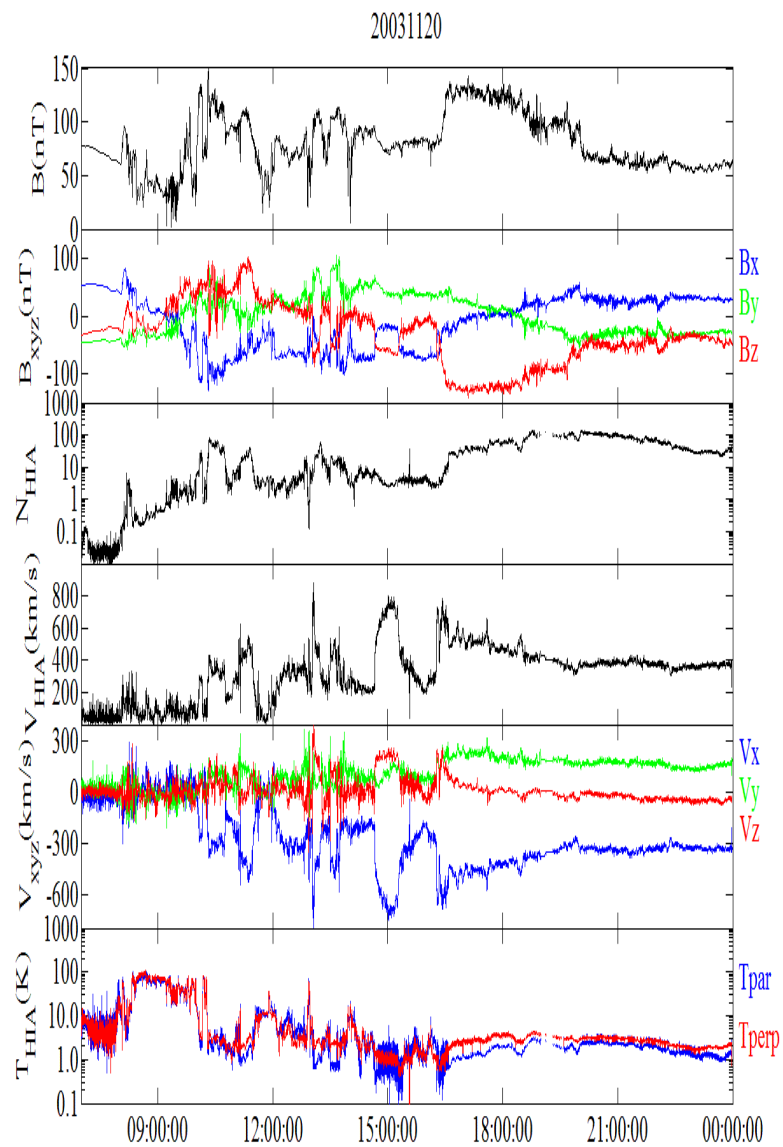
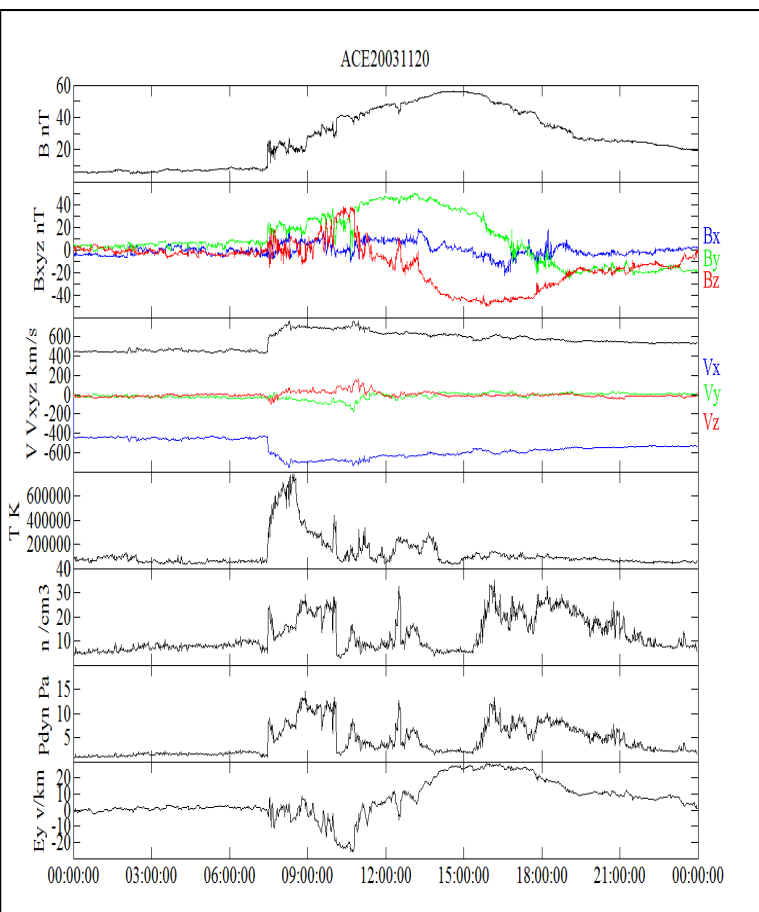
因为 $\gamma < 2$ 和 $r > 0$ ，所以 $r < r_n$ 。设为 r_0 方程[3.3.9]的正根。则由[3.3.7]或[3.3.8]式，激波强度为

$$\frac{p_2}{p_1} = R + 1 + N\left(1 - \frac{1}{r_0}\right) - A(r_0^2 - 1) \quad [3.3.14]$$

因为 $r_0 < r_n$ 以及 $A > 0$ ，由上式可以看出，有磁场时激波引起的压缩减少了。对于马赫数很大和相对固定的值 A 而言，由方程[3.3.9]近似得到

$$r_0 = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{B_1}{B_2} \approx \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad [3.3.15]$$

说明磁场增加的效果是有限的；压强比和温度比也近似等于[3.2.13]和[3.2.15]。



3.4 边界层与间断面的分类

在太阳系行星际空间, 有四种类型的物理边界, 它们是:

- (1) 太阳风直接与一个固体物体的交界 (如太阳风中的月球);
- (2) 太阳风与一个无磁场但有电离层的行星的交界 (如太阳风中的金星);
- (3) 太阳风与一个有闭合边界磁场行星的交界 (如太阳风中的地球, 木星, 海王星, 天王星);
- (4) 太阳风与一个有开边界磁场行星的交界 (如磁暴时太阳风中的地球)。

见图3.4.1

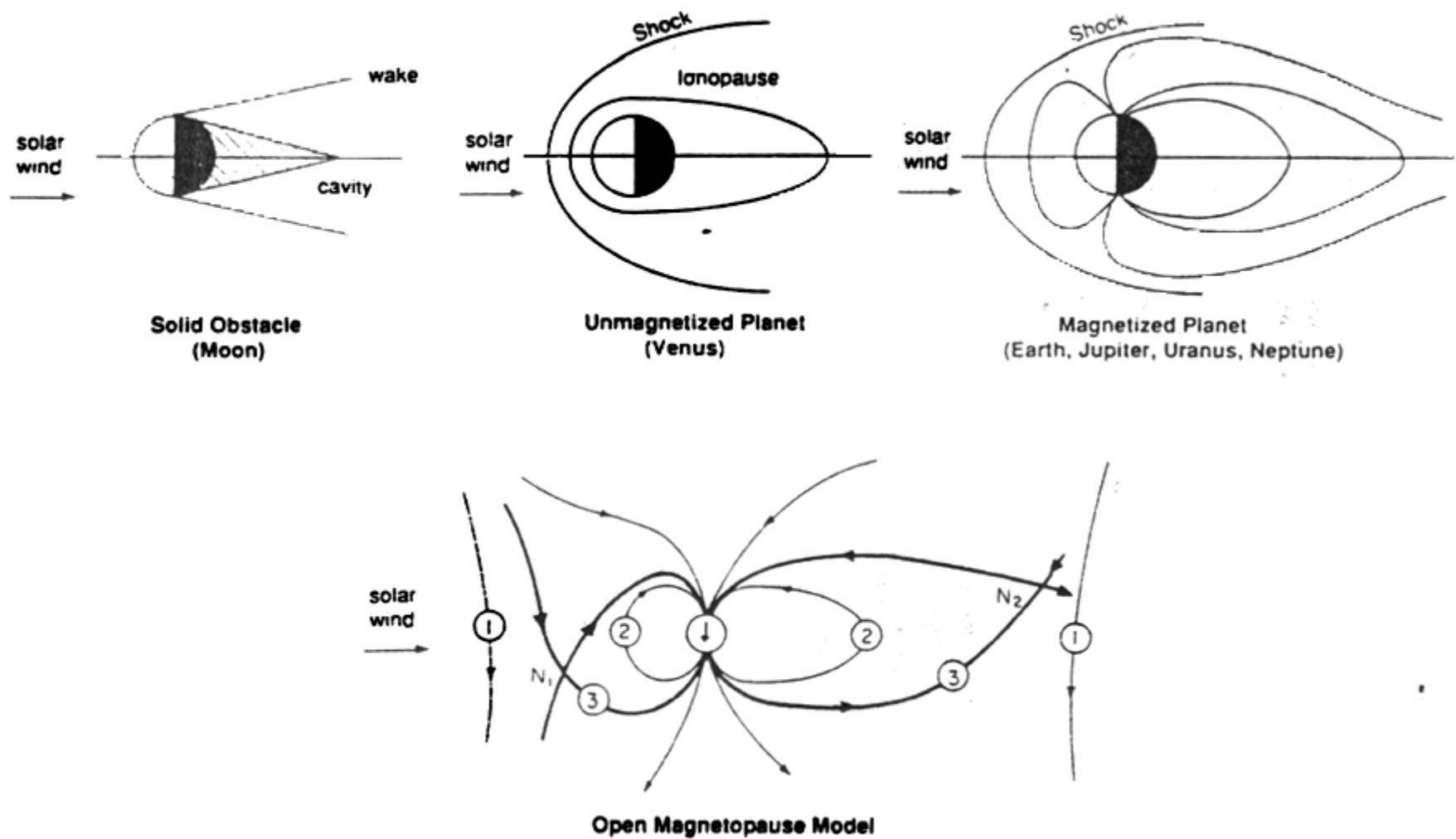


图3.4.1 太阳风在行星际流动中与各种障碍物交界的示意图

在运动的导电流体中我们考虑麦可思维克斯韦方程组的积分形式

$$\begin{aligned}
 \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\
 \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= I_f - \frac{d}{dt} \int_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \\
 \oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= Q_f \\
 \oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.4.1.}$$

通过图3.4.2可以说明边值关系为

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0 \\
 \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \mathbf{j}_s \\
 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) &= \sigma_s \\
 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0
 \end{aligned} \right\}
 \tag{3.4.2.}$$

其中 $\mathbf{n}$ 为边界的法向矢量。 σ_s 和 $\mathbf{j}_s$ 分别为面电荷密度和线电流密度。

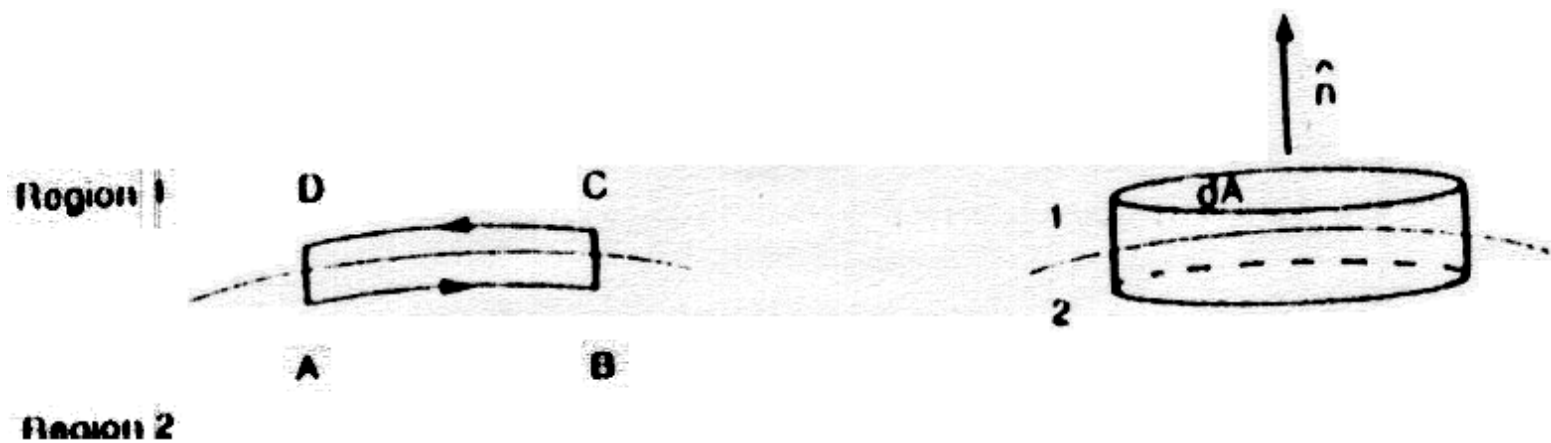


图3.4.2 积分边界的取向和面元的取向

上方程组写成间断面关系就为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{[E_t]} &= 0 \\ \mathbf{[H_t]} &= \mathbf{j_s} \\ \mathbf{[D_n]} &= \mathbf{|\sigma_s|} \\ \mathbf{[B_n]} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [3.4.3]$$

为更好地利用磁流体力学的特殊性去描述横跨边界两边的电磁场和流动的关系，加深对质量流，对流电场，法向磁场，切向电场等参量的理解，源于朗道和栗弗席兹的分类将间断面分为以下六种：

(1) 切向间断

$$G=0 \quad B_n=0 \quad [\rho] \neq 0$$

(2) 接触间断

$$G=0 \quad B_n \neq 0 \quad [\rho] \neq 0$$

(3) 垂直激波

$$G \neq 0 \quad B_n=0 \quad [\rho] \neq 0$$

(4) 平行激波

$$G \neq 0 \quad B_t=0 \quad [\rho] \neq 0$$

(5) 斜激波

$$G \neq 0 \quad B_n \neq 0 \quad [\rho] \neq 0$$

(6) 旋转间断

$$G \neq 0 \quad B_n \neq 0 \quad [\rho] = 0$$

激波再分类

令 θ 是激波法向 $\mathbf{n}$ 和磁场 $\mathbf{B}$ 夹角

垂直激波 $\theta_{Bn}=90^\circ$
准垂直激波 $45^\circ < \theta_{Bn} < 90^\circ$

平行激波 $\theta_{Bn}=0^\circ$,
准平行激波 $0^\circ < \theta_{Bn} < 45^\circ$

磁声马赫数 $M_{MS}=U_{SW}/U_{MS}$

其中 $U_{SW}/$ 和 U_{MS} 分别是太阳风速和磁声波速。

对于垂直激波 $M_{MS}=U_{SW}/(V_A^2 + C_S^2)^{1/2}$

切向间断 ($G=0$, $B_n=0$)

切向间断描述的是没有质量流通过此边界面，边界面两边也没有法向磁场。边界面两边只有切向速度和切向磁场。在与边界面平行的平面内，方向和大小没有任何特殊限制。

$$\left. \begin{aligned} \rho u_n &= G=0 \\ \mathbf{[u_t]} &\neq 0 \\ \mathbf{[B_t]} &\neq 0 \\ \mathbf{[\rho]} &\neq 0 \\ \mathbf{[p + B_t^2 / 2\mu_0]} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [3.4.4]$$

若压力各向异性，方程[3.4.4]最后一式变为

$$\mathbf{[p_{\perp}]} + \mathbf{[B_t^2 / 2\mu_0]} = 0 \quad [3.4.5]$$

接触间断 $(G = 0, \quad B_n \neq 0)$

接触间断描述的是没有质量流通过此边界面，但边界面两边有连续的法向磁场。而且在边界面两边密度可以各自取值，大小没有任何特殊限制。

从具有各向同性压力的磁流体的边界面两边的关系式[3.1.5]—3.1.8]得到

$$\left. \begin{array}{l} \rho u_n = G = 0 \\ \mathbf{[u]} = 0 \\ \mathbf{[B_t]} = 0 \\ \mathbf{[\rho]} \neq 0 \\ \mathbf{[p]} = 0 \end{array} \right\} \quad [3.4.6]$$

由关系式[3.1.5]—3.1.8]知道，从 $G=0, B_n \neq 0$ 可以推出 $u_n=0$ ； $\mathbf{[B_t]} = 0$ 。再推出 $\mathbf{[p]} = 0$ 和 $\mathbf{[u_t]} = 0$ 。也就是讲，接触间断在物理上将讲是指通过边界面密度不连续且没有质量流过边界面。边界面两边不同的等离子体可以有各自的密度和温度。

接触间断这种类型的边界可以用来描述静态电离层边界的不同分层。但很容易被沿着磁力线运动的等离子体流所破坏。一般在带磁等离子体中很难达到和维持这类间断面。

若压力各向异性，则有关系式

$$(p_{\perp 1} - p_{\perp 2}) + \frac{(B_1^2 - B_2^2)}{2\mu_0} = B_n^2 \left(\frac{p_{//2} - p_{\perp 2}}{B_2^2} - \frac{p_{//1} - p_{\perp 1}}{B_1^2} \right) \quad [3.4.7]$$

但关系 **【u】**， **【B_t】**， **【p】** 就不一定为零。

旋转间断 ($G \neq 0$ $B_n \neq 0$, $[\rho] = 0$)

旋转间断描述的是有质量流通过此边界面，有连续的法向磁场。但边界面两边的密度一样，这样其就有连续的法向速度 u_n 。根据关系式 [3.1.5]和[3.1.7]得到

$$G = B_n^2 \rho / \mu_0 \quad [3.4.8]$$

$$u_n = B_n / (\rho \mu_0)^{1/2} \quad [3.4.9]$$

再根据关系式 [3.1.7]和[3.1.8]得到

$$[u_t] = [B_t] / (\rho \mu_0)^{1/2} \quad [3.4.10]$$

$$G [\varepsilon] + G [p + B_t^2 / \mu_0] + G [u_t - B_t / (\rho \mu_0)]^2 / 2 = 0 \quad [3.4.11]$$

再根据关系式 [3.1.6]和[3.1.7]得知 方程[3.4.11]左边第二和第三项为零，因此， $[\varepsilon] = 0$ ，再加上 $[\rho] = 0$ ，根据热力

学关系得到边界面两边各向同性压力也相等。根据[3.1.7]还可以得到边界面两边 $\mathbf{B}_t^2$ 也相等，由于 $\mathbf{B}_n^2$ 也相等，因此磁场的大小 $(\mathbf{B}_t^2 + \mathbf{B}_n^2)^{1/2}$ 在边界面两边是相等的。由于 $\mathbf{u}_t$ 和 $\mathbf{B}_t$ 是不连续的，即 $[\mathbf{u}_t] = [\mathbf{B}_t] / (\rho\mu_0)^{1/2} \neq 0$ ，因此称为旋转间断。(注意推导求证时,将间断面两边物理矢量差具体展开求解)

旋转间断的总的特点是

$$G \neq 0$$

$$B_n \neq 0$$

$$[\mathbf{u}_t] \neq 0$$

$$[\mathbf{B}_t] \neq 0$$

$$[\mathbf{B}_t^2] = 0$$

$$[\rho] = 0$$

$$[p] = 0$$

$$[\mathbf{u}_n] = 0$$

$$u_n = B_n / (\rho\mu_0)^{1/2}$$

[3.4.12]

对于若压力各向异性，则有关系式

$$G \neq 0$$

$$B_n \neq 0$$

$$\mathbf{u}_t \neq 0$$

$$\mathbf{B}_t \neq 0 \quad [3.4.13]$$

$$\begin{aligned} B_n G \mathbf{u}_t &= G^2 \mathbf{B}_t / \rho = \\ &= B_n^2 \mathbf{B}_t / \mu_0 - \mathbf{B}_t (p_{\parallel} - p_{\perp}) / B^2 \end{aligned} \quad [3.4.14]$$

将关系式[3.4.14]变为

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{t1} \{ G^2 / \rho_1 - B_{n1}^2 [1 / \mu_0 - (p_{\parallel 1} - p_{\perp 1}) / B_1^2] \} = \\ \mathbf{B}_{t2} \{ G^2 / \rho_2 - B_{n2}^2 [1 / \mu_0 - (p_{\parallel 2} - p_{\perp 2}) / B_2^2] \} \end{aligned} \quad [3.4.15]$$

定义

$$\begin{aligned} V_{A1} &= B_1 / (\rho_1 \mu_0)^{1/2} [1 - \mu_0 (p_{\parallel 1} - p_{\perp 1}) / B_1^2]^{1/2} \\ V_{A2} &= B_2 / (\rho_2 \mu_0)^{1/2} [1 - \mu_0 (p_{\parallel 2} - p_{\perp 2}) / B_2^2]^{1/2} \end{aligned} \quad [3.4.16]$$

如果

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V}_{A1} \cdot \mathbf{n}$$

$$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V}_{A2} \cdot \mathbf{n} \quad [3.4.17]$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{此时} \quad G^2/\rho_1 - B_{n1}^2[1/\mu_0 - (p_{\parallel 1} - p_{\perp 1})/B_1^2] = \\ \quad G^2/\rho_2 - B_{n2}^2[1/\mu_0 - (p_{\parallel 2} - p_{\perp 2})/B_2^2] = 0 \end{array} \right)$$

则[3.4.15]自然满足。这正是对压力各向异性情况下旋转间断的要求。当 $p_{\parallel} = p_{\perp}$ 时，自然就过渡到在边界面两边的法向速度 $u_n = B_n/(\rho\mu_0)^{1/2}$ 。在旋转间断这种条件下， $\mathbf{B}_1$ ， $\mathbf{B}_2$ 和 $\mathbf{n}$ 并不共面。从G知道 $\rho_1 \mathbf{V}_{A1} \cdot \mathbf{n} = \rho_2 \mathbf{V}_{A2} \cdot \mathbf{n}$ 。如果修正阿尔芬波速 $\mathbf{V}_{A1}$ 和 $\mathbf{V}_{A2}$ 确定，边界面两边密度比就可以确定。在压力各向异性情况下旋转间断可以存在通过边界面密度不连续。这与压力各向同性情况下旋转间断的条件就大不一样。

间断面关系式总结

对于压力各向同性磁流体：

$$\left[B_n \right] = 0 \quad [3.4.18]$$

$$\left[\rho u_n \right] = 0 \quad [3.4.19]$$

$$B_n \left[\mathbf{u}_t \right] = \left[\mathbf{B}_t u_n \right] \quad [3.4.20]$$

$$B_n \left[\mathbf{u}_t \right] = G \left[\mathbf{B}_t / \rho \right] \quad [3.4.21]$$

$$B_n \left[\mathbf{u} \right] = G \left[\mathbf{B} / \rho \right] \quad [3.4.22]$$

$$\left[p \right] + G^2 \left[V \right] + \left[B_t^2 \right] / 2\mu_0 = 0 \quad [3.4.23]$$

$$G \left[\mathbf{u}_t \right] = B_n / \mu_0 \left[\mathbf{B}_t \right] \quad [3.4.24]$$

$$G \left[h + G^2 V^2 / 2 + u_t^2 / 2 + V B_t^2 / \mu_0 \right] = B_n \left[\mathbf{B}_t \cdot \mathbf{u}_t \right] / \mu_0 \quad [3.4.25]$$

对于压力各向异性磁流体:

$$\mathbf{B}_n \mathbf{u}_n = 0 \quad [3.4.26]$$

$$\rho \mathbf{u}_n = 0 \quad [3.4.27]$$

$$B_n \mathbf{u}_t = \mathbf{B}_t u_n \quad [3.4.28]$$

$$B_n \mathbf{u}_t = G \mathbf{B}_t / \rho \quad [3.4.29]$$

$$B_n \mathbf{u} = G \mathbf{B} / \rho \quad [3.4.30]$$

$$\mathbf{p}_\perp + G^2 \mathbf{V} + \mathbf{B}_t^2 / 2\mu_0 - B_n^2 (p_\parallel - p_\perp) / B^2 = 0 \quad [3.4.31]$$

$$G \mathbf{u}_t - B_n \mathbf{B}_t / \mu_0 - \mathbf{B}_t (p_\parallel - p_\perp) / B^2 = 0 \quad [3.4.32]$$

$$G \left[\varepsilon + u^2 / 2 + p_\perp / \rho + B_t^2 / \mu_0 \right] + G B_n^2 (p_\parallel - p_\perp) / B^2 - B_n \mathbf{B}_t \cdot \mathbf{u}_t [1 / \mu_0 - (p_\parallel - p_\perp) / B^2] = 0 \quad [3.4.33]$$

3.5 激波与角度的关系

对于压力各向同性磁流体：将[3.1.3]中部分的关系式重新写为

$$\mathbf{[B_n]} = 0 \quad [3.5.1]$$

$$\mathbf{[\rho u_n]} = 0 \quad [3.5.2]$$

$$\mathbf{[(n \cdot B)u - (n \cdot u)B]} = 0 \quad [3.5.3]$$

$$\mathbf{[\rho(u \cdot n)u - (p + B^2/2\mu_0)n - B_n B/\mu_0]} = 0 \quad [3.5.4]$$

$$\text{令 } \mathbf{[AB]} = \langle A \rangle \mathbf{[B]} + \mathbf{[A]} \langle B \rangle \quad [3.5.5]$$

$$\langle A \rangle = (A_1 + A_2)/2, \quad \langle B \rangle = (B_1 + B_2)/2 \quad [3.5.6]$$

方程[3.5.2]、[3.5.3]、[3.5.4]重写为

$$G \left[\frac{1}{\rho} \right] - \left[u_n \right] = 0 \quad [3.5.7]$$

$$G/\rho \left[\mathbf{B} \right] + \mathbf{B} \left[u_n \right] - B_n \left[\mathbf{u} \right] = 0 \quad [3.5.8]$$

$$G \left[\mathbf{u} \right] + \left[p \right] \mathbf{n} + \mathbf{B} \cdot \left[\mathbf{B} \right] \mathbf{n} / 2\mu_0 - B_n / \mu_0 \left[\mathbf{B} \right] = 0 \quad [3.5.9]$$

这里去掉了符号<>, 但【】外面的量仍然看成是矢量或标量的平均值。

现在假定在一个直角坐标系中 $\mathbf{n}$ 为 $\mathbf{z}$ 方向, 本节以下讨论用方括号[]代替黑花括号【】, 将上面方程组写成分量形式为

$$\frac{G}{\rho}[B_x]-B_n[U_x]+B_x[U_n]=0 \quad [3.5.10]$$

$$\frac{G}{\rho}[B_y]-B_n[U_y]+B_y[U_n]=0 \quad [3.5.11]$$

$$\frac{G}{\rho}[B_y]=0 \quad [3.5.12]$$

$$-\frac{B_n}{\mu_0}[B_x]+G[U_x]=0 \quad [3.5.13]$$

$$-\frac{B_n}{\mu_0}[B_y]+G[U_y]=0 \quad [3.5.14]$$

$$\frac{B_x}{\mu_0}[B_x]+\frac{B_y}{\mu_0}[B_y]+G[U_n]+[p]=0 \quad [3.5.15]$$

方程[3.5.10]和方程[15.5.13]结合消去 $[U_x]$ 得到

$$\left(\frac{G^2}{\rho} - \frac{B_n^2}{\mu_0}\right)[B_x] + GB_x[U_n] = 0 \quad [3.5.16]$$

方程[3.5.11]和方程[15.5.14]结合消去 $[U_y]$ 得到

$$\left(\frac{G^2}{\rho} - \frac{B_n^2}{\mu_0}\right)[B_y] + GB_y[U_n] = 0 \quad [3.5.17]$$

假定 $(G^2/\rho - B_n^2/\mu_0) \neq 0$ ，否则就是旋转间断而不是激波了。将方程[3.5.16]和方程[3.5.17]代入方程[3.5.15]消去 $[B_x]$ 和 $[B_y]$ 得到

$$-\frac{G(B_x^2 + B_y^2)}{\mu_0}[U_n] + G\left(\frac{G^2}{\rho} - \frac{B_n^2}{\mu_0}\right)[U_n] = -\left(\frac{G^2}{\rho} - \frac{B_n^2}{\mu_0}\right)[p] \quad [3.5.18]$$

利用连续性关系 $G[1/\rho]=[U_n]$ 在上方程中消去 $[U_n]$ ，得到

$$G^2 \left(\frac{G^2}{\rho} - \frac{B^2}{\mu_0} \right) \left[\frac{1}{\rho} \right] = - \left(\frac{G^2}{\rho} - \frac{B_n^2}{\mu_0} \right) [p] \quad [3.5.19]$$

其中 $B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_n^2$ 。重写上方程得到

$$\rho G^4 + G^2 \left(\frac{[p]1/\rho}{[1/\rho]} - \frac{B^2}{\mu_0} \right) - \frac{B_n^2}{\mu_0} \frac{[p]}{[1/\rho]} = 0 \quad [3.5.20]$$

现在考察压缩波的传播，对小振幅的扰动而言

$$[p] = \delta p \quad [3.5.21]$$

$$\left[\frac{1}{\rho} \right] = \delta \left(\frac{1}{\rho} \right) = - \frac{\delta \rho}{\rho^2} \quad [3.5.22]$$

$$\begin{aligned}\frac{[p]}{[1/\rho]} &= -\frac{\rho^2 \delta p}{\delta p} \\ &= -\rho^2 C_s^2\end{aligned}\quad [3.5.23]$$

这里 C_s^2 是声速，利用上面关系式将方程[3.5.20]重写为

$$\rho^2 U^2 \left(\rho U^2 - \frac{B^2}{\mu_0} \right) - \rho^2 C_s^2 \left(\rho U^2 - \frac{B_n^2}{\mu_0} \right) = 0 \quad [3.5.24]$$

利用关系式 $V_A^2 = B^2 / \mu_0 \rho$, $V_{An}^2 = B_n^2 / \mu_0 \rho$ 将方程[3.5.24]重写为

$$U^4 - (C_s^2 + U_A^2) U^2 + C_s^2 V_{An}^2 = 0 \quad [3.5.25]$$

这个方程就是第二章第一节中磁流体力学波的快慢波的色散关系。其解为

$$U_{fast}^2 = \frac{1}{2}(C_s^2 + U_A^2) \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4C_s^2 V_{An}^2}{C_s^2 + U_A^2}} \right\} \quad [3.5.26]$$

$$U_{fast}^2 = \frac{1}{2}(C_s^2 + U_A^2) \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4C_s^2 V^2 \cos^2 \theta}{C_s^2 + U_A^2}} \right\} \quad [3.5.27]$$

其中 θ 是总磁场与激波法向的夹角。上式说明斜激波有快慢模之分。对于垂直激波 $G \neq 0, B_n=0, \theta=90^\circ$ ，得到

$$U_{fast}^2 = (C_s^2 + U_A^2) \quad [3.5.28]$$

$$U_{slow}^2 = 0 \quad [3.5.29]$$

这说明垂直激波只与快模波有关。

对于斜激波来说其涉及快慢模。那么快模斜激波和慢模斜激波区分条件是什么？现在从方程组[3.5.7] — [3.5.9]消去 $[U_n]$ 和 $[U]$ 得到

$$[\mathbf{B}] = kG^2(\mathbf{B} - B_n \mathbf{n}) \quad [3.5.30]$$

用类系似方法也可以得到

$$[U] = kG\left(\frac{B_n}{\mu_0}\mathbf{B} - \frac{G^2}{\rho}\mathbf{n}\right) \quad [3.5.31]$$

$$\left[\frac{1}{\rho}\right] = -k\left(\rho U^2 - \frac{B_n^2}{\mu_0}\right) \quad [3.5.32]$$

其中是 k 由激波下游物理参数值所确定的常数。对于激波来说，因为是稠密跃变或压缩，即 $[1/\rho] < 0$ ，根据方程[3.5.32]对于快模斜激波来说， $k > 0$ ，再根据方程[3.5.30]和方程[3.5.31]，知道这时切向磁场和切向速度增加。根据方程[3.5.32]对于慢模斜激波

来说, $k < 0$, 再根据方程[3.5.30]和方程[3.5.31], 知道这时切向磁场和切向速度减少。这种区分可以用图3.5.1所示的物理图象来说明。

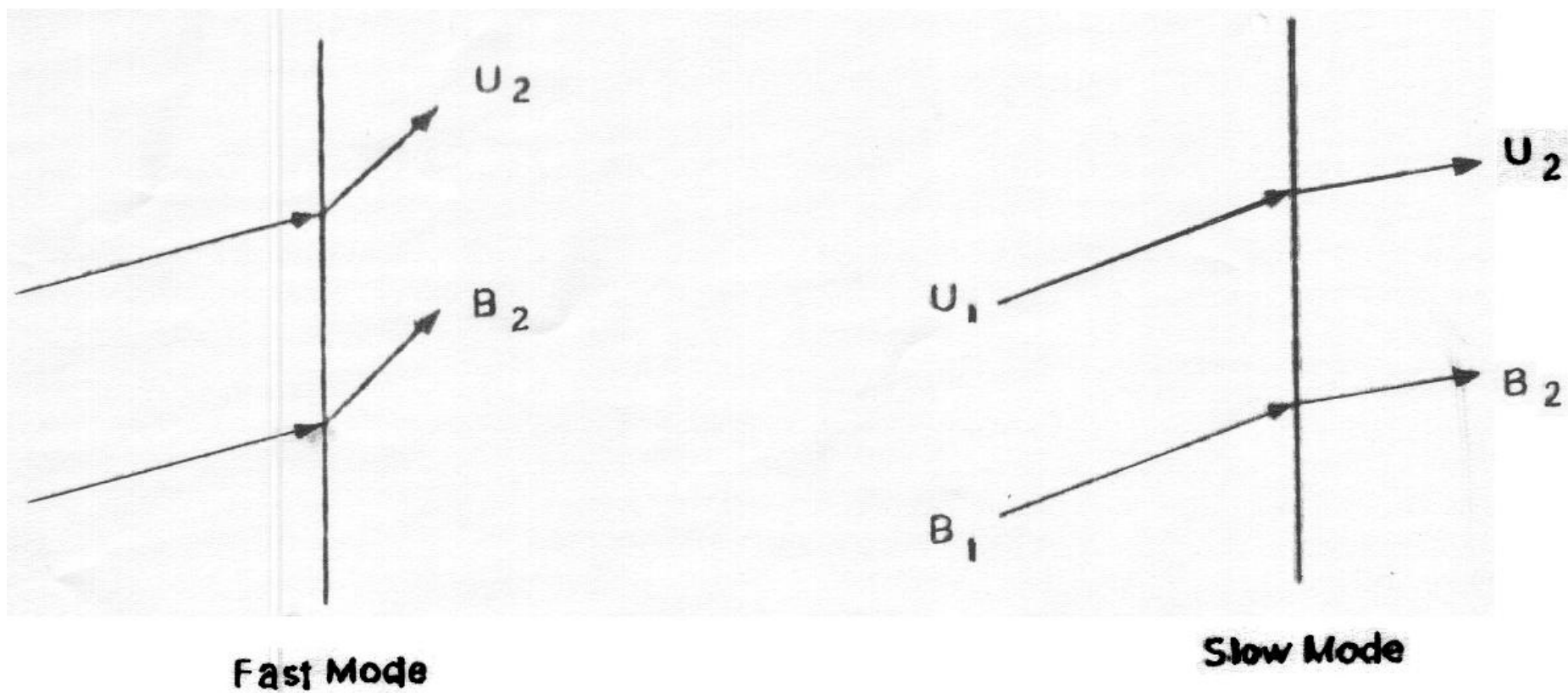


图3.5.1 跨越快模斜激波和慢模斜激波时磁场和速度的旋转

3.6 粒子在激波附近的加速

在静止坐标系由于存在 $\mathbf{E} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$, 粒子会被电场加速, 粒子在激波面被反射后会获得比碰到激波前更多的能量。

选定一个在其中速度平行于磁场的参照系, 在此参考系中显然电场为零, 因此, 运动类的能量(动能和热能)也守恒。这个参照系叫de Hoffmann-Teller 参照系(见图 3.6.1), 其表明了激波面附近的位形。令入射速度分解为

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\parallel i} + \mathbf{v}_{HT} \quad [3.6.1]$$

这里 $\mathbf{v}_i$ 是平行于磁场 $\mathbf{B}$ 的速度, $\mathbf{v}_{HT}$ 是平行于激波面的速度。令反射速度分解为

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_{\parallel r} + \mathbf{v}_{HT} \quad [3.6.2]$$

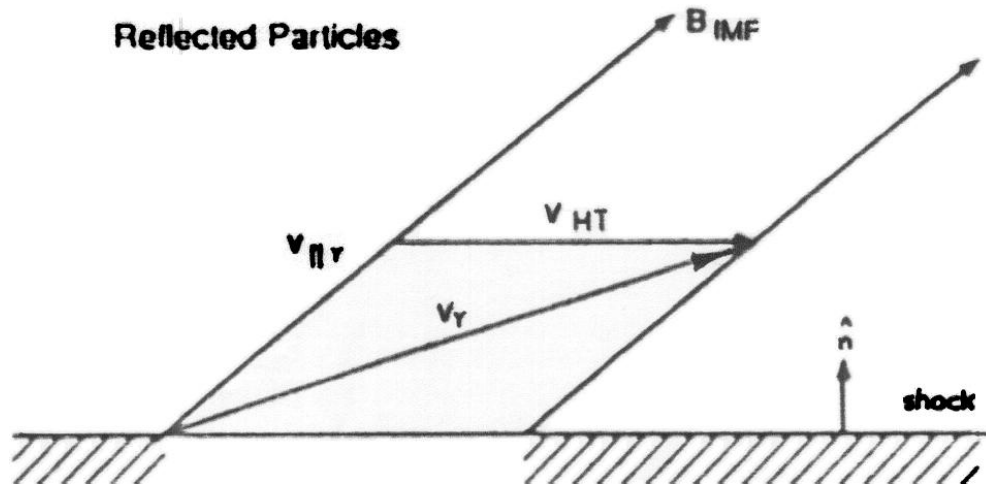
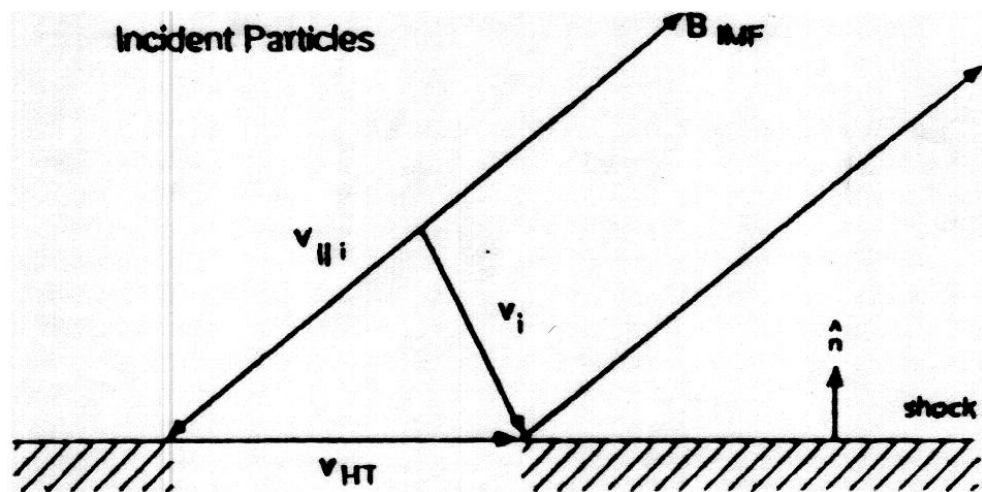


图3.6.1在Hoffmann-Teller 参照系中粒子入射速度和反射速度在磁场方向和激波面的分解

不论磁矩守恒与否，反射平行速度可以表示为

$$\mathbf{v}_{\parallel r} = -\delta \mathbf{v}_{\parallel i} \quad [3.6.3]$$

这里 δ 为正常数。

在Hoffmann-Teller 参照系中粒子的能量守恒

$$v_{\parallel i}^2 + v_{\perp i}^2 = v_{\parallel r}^2 + v_{\perp r}^2 \quad [3.6.4]$$

从[3.6.1]和[3.6.2]获得

$$\begin{aligned} v_i^2 &= v_{\parallel i}^2 + v_{HT}^2 + 2\mathbf{v}_{\parallel i} \cdot \mathbf{v}_{HT} \\ v_r^2 &= v_{\parallel r}^2 + v_{HT}^2 + 2\mathbf{v}_{\parallel r} \cdot \mathbf{v}_{HT} \end{aligned} \quad [3.6.5]$$

上两式相减得

$$\begin{aligned} v_i^2 - v_r^2 &= v_{\parallel i}^2 - \delta^2 v_{\parallel i}^2 + 2\mathbf{v}_{\parallel i} \cdot \mathbf{v}_{HT} + 2\delta \mathbf{v}_{\parallel i} \cdot \mathbf{v}_{HT} \\ &= (1 - \delta^2) v_{\parallel i}^2 + 2(1 + \delta) \mathbf{v}_{\parallel i} \cdot \mathbf{v}_{HT} \end{aligned} \quad [3.6.6]$$

根据图3.6.2进行矢量和变量运算得到

$$\mathbf{v}_{\parallel i} \cdot \mathbf{v}_{HT} = \mathbf{v}_{\parallel i} \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{\parallel i}) \quad [3.6.7]$$

$$v_{\parallel i} \cos \theta_{Bn} = v_i \cos \theta_{vn} \quad [3.6.8]$$

（注意一个速度在激波面的投影和激波法向上的投影是互相垂直的）

$$v_{\parallel i} \cdot \mathbf{v}_{HT} = v_{\parallel i} v_i \cos \theta_{Bv} - v_{\parallel i}^2 \quad [3.6.9]$$

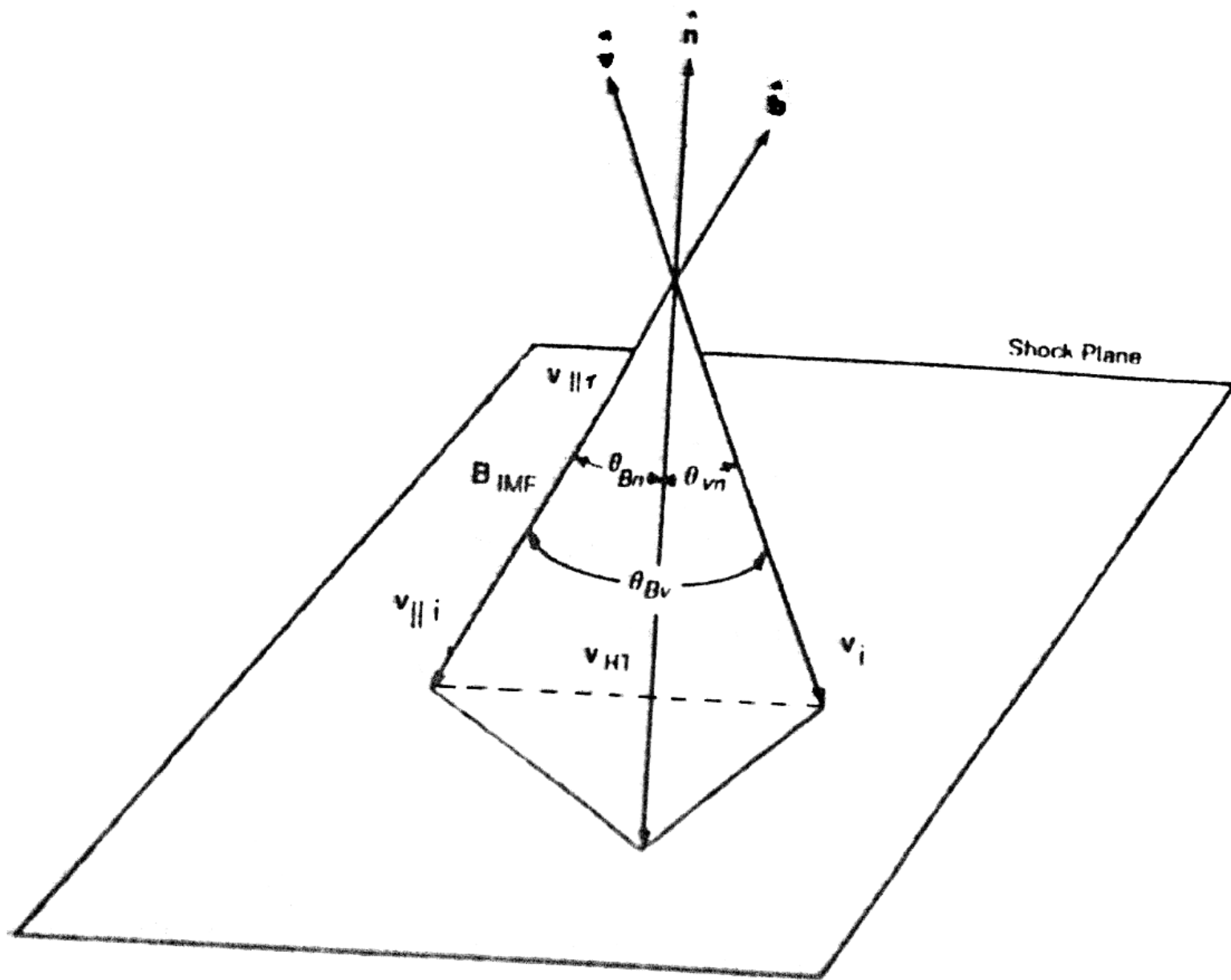


图3.6.2，入射速度矢量与磁场矢量和激波面法向矢量的角度关系

将[3.6.9]代入[3.6.6]获得

$$v_r^2 = v_i^2 + (1 + \delta)^2 v_{\parallel i}^2 - 2(1 + \delta) v_{\parallel i} v_i \cos \theta_{Bv} \quad [3.6.10]$$

从[3.6.3]和[3.6.4]获得

$$\begin{aligned} v_{\perp r}^2 &= v_{\perp i}^2 + (1 - \delta^2) v_{\parallel i}^2 \\ &\approx (1 - \delta^2) v_{\parallel i}^2 \end{aligned} \quad [3.6.11]$$

这里假定入射粒子是冷的，那么反射粒子就获得大的热能，当 $\delta = 1$ 时，反射粒子没有热能增量。最后，回到静止坐标系，得到反射粒子总能（动能加上热能增量）与入射粒子总能之比为

$$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_i} = \frac{\frac{m}{2}(v_r^2 + v_{\perp r}^2)}{\frac{m}{2}v_i^2} \quad [3.6.12]$$

即

$$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_i} = 1 + 2(1 + \delta) \left(\frac{v_{//i}^2 - v_{//i} v_i \cos \theta_{Bv}}{v_i^2} \right) \quad [3.6.13]$$

利用关系式[3.6.8]得到

$$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_i} = 1 + 2(1 + \delta) \left(\frac{\cos^2 \theta_{vn} - \cos \theta_{vn} \cos \theta_{Bn} \cos \theta_{Bv}}{\cos^2 \theta_{Bn}} \right) \quad [3.6.14]$$

从上式看出反射粒子的能量与入射粒子的能量和激波的几何位形（入射速度矢量与磁场矢量和激波面法向矢量的角度）有关。值得注意的是上面过程是在假定均匀介质和粒子绝热运动条件下求解的。如果场是非均匀，**de Hoffmann-Teller** 参照系无法稳定选取，这时就得考虑Lorentz运动方程。

第四章

磁流体力学不稳定性

各小节内容:

4.1 引言

4.2 电流不稳定性

4.3 瑞利-泰勒不稳定性

4.4 交换不稳定性

4.5 气球模不稳定性

4.6 螺旋不稳定性

4.7 电阻不稳定性

4.8 水龙带不稳定性

4.9 双流不稳定性

4.10 开尔文-霍姆霍兹不稳定性

(**Kelvin-Helmholtz Instability**)

4.1 引言

等离子体可以被磁场约束或者在其他其它力的综合作用下处于力学平衡。但许多观测和实验又表明，不论那一种磁约束位形都伴随着等离子体的这样或那样的不稳定性，导致带电粒子的损失，或输运系数的异常增大，使等离子体的约束时间受到限制。所以，研究等离子体的各种不稳定性，阐明其物理机制，探索等离子体波的激发和等离子体稳定化的方法，一直是空间物理、热核聚变和其它应用等离子体物理研究的一个中心课题。

等离子体不稳定性及分类

在日地物理中，太阳耀斑，极光，磁暴，亚暴以及电离层暴和热层暴都是空间等离子体物理典型的不稳定现象。

等离子体处于非热力学平衡状态意味着等离子体具有较高的自由能，因而必然会产生从较高能量状态过度到因较低能量状态的宏观或微观运动。如果这种运动是在准静态过程中进行的，那就是所谓经典输运。但是，在磁场中的等离子体是具有大量磁流体力学自由度和速度空间自由度的系统，其中任何偏离力学平衡的小扰动有可能发展成为快速的等离子体块运动，等离子体内带电粒子的集体运动，内部感应电磁场随时间增长以及电磁波辐射等剧烈运动，引起远大于经典输运的粒子损失。这种以集体运动方式趋向热力学平衡的能量转换过程就是等离子体的不稳定性。

这种过程的特点是，任何离力学平衡的小扰动导致系统进一步的偏离：若 x 为起始偏离，则随时间的变化率 dx/dt 与 x 成比例，即 $dx/dt=\gamma x$ ，由此得到 $x=e^{\gamma t}$ ，即起始扰动随时间指数增长，系数 γ 称为**不稳定性的增长率**。等离子体集体运动的时间尺度是 τ_p ，它远小于带电粒子之间的二体碰撞时间 τ_c ($\tau_p \sim \tau_c / n\lambda_{De}^3$, 对于等离子体 $n\lambda_{De}^3 \gg 1$)。

等离子体偏离热力学平衡大体有两类方式。一类是等离子体宏观参数如密度、温度、压强或其它热力学量的空间局部化和不均匀性；另一类是等离子体的速度空间分布函数偏离麦克斯韦分布。由于前一种原因而产生不稳定时，等离子体通常以整体形式在空间改变其形状，因而称为**宏观不稳定性**（或**位形空间不稳定性**）。由于后一种原因产生的不稳定性称为**微观不稳定性**（或**速度空间不稳定性**）。宏观不稳定性通常用磁流体力学进行分析，故也称为**磁流体力学不稳定性**，而微观不稳定性则用动力论方程进行分析，因而也叫**动力学不稳定性**。

宏观不稳定性 and 微观不稳定性还可以进一步分为**静电不稳定性**和**电磁不稳定性**。静电不稳定性是与电荷分离及其积累和增长有关的不稳定性，这时的电场是无旋的，即 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ，故可用静电标势描述（ $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ ）。电磁不稳定性是与电流密度的积累和增长有关的不稳定性，这时 $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$ ，故引起磁场的弯曲、压缩和膨胀。

等离子体不稳定性也可以按照引起不稳定性的驱动能量进行分类。如磁能引起**电流不稳定性**；非极小磁场位形中等离子体的膨胀能引起**交换不稳定性**；由于等离子体密度和温度（因而等离子体压强）的空间梯度而产生的等离子体膨胀能引起**漂移不稳定性**（或**普适不稳定性**）；以及和等离子体的非麦克斯韦速度分布或压强各向异性相对应的自由能引起速度空间不稳定性等等。

等离子体不稳定性分析方法

研究等离子体不稳定性通常采用**直观分析**，**简正模分析**和**能量原理**等分析方法。直观分析法是给平衡位形以某种扰动后分析作用于等离子体上的力的变化，如果扰动引起的作用力使起始扰动增长，则等离子体是不稳定的，反之扰动引起的作用力指向使起始扰动减小的方向，则为稳定。这种分析方法给不出不稳定性的增长率等知识，但是它能帮助人们了不稳定性的物理机制，并且是进一步进行理论分析的基础。

简正模分析法是将不稳定性（振荡）的增长作为本征值问题来处理的一种方法。将随时间变化的扰动量（速度、电场、密度等） $q(\mathbf{r},t)$ 写成如下傅里叶分量形式

$$q(\mathbf{r},t) \rightarrow q(\mathbf{k},\omega t) \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) ,$$

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega_r(\mathbf{k}) + i\gamma(\mathbf{k})$$

将它代入线性化的磁流体力学方程，同时考虑边界条件，并按一种扰动变量进行整理，则可以得到色散关系

$$D(\omega, k) = 0$$

如果从色散关系解得到的所有简正模式的 ω 均为实数，则所有扰动变量将作简谐振荡，这时等离子体是稳定的；如果至少有一个 ω 具有正虚部 $\gamma(\mathbf{k}) > 0$ ，则该扰动模式将随时间按指数增长，系统为不稳定。这种分析法能够给出平衡位形稳定性的比较完整的知识。但是，除了比较简单的位形外本微方程通常是很难解得的。在聚变研究的早期年代，许多人把简正模分析用到磁流体力学中去。相继用此法对箍缩效应中的高温等离子体柱的稳定性进行了分析。

根据力学的稳定性理论我们知道，如果一个力学系统处于位能为极小的平衡状态，则此平衡为稳定平衡。能量原理就是根据这个一般原理分析等离子体稳定性一种方法。为了用这个方法研究等离子体的稳定性，必须计算微小而有限的扰动所引起的原平衡位形的位能变化。如果对于满足给定边界条件的所有扰动，位能变化为正，则等离子体是稳定的；如果至少有一种扰动，它所引起位能变化为负，则系统为不稳定。这种方法的特点是不直接求解基本方程的情况下也能考察平衡位形的稳定性，因而对于简正模分析难于处理的复杂位形，它是很有用的分析手段，故在等离子体宏观不稳定性理论中取得很大成功。最初利用能量原理分析等离子体宏观不稳定性的是伯恩斯坦（Bernstein）等，其后许多人应用这种方法研究了多种具体问题。在热核聚变研究的初期人们用此法分析了柱形箍缩柱的稳定性，其后对于交换不稳定性，极小磁场位形的稳定性以及环形系统的稳定性等也都用此法进行了分析。

4.2 电流不稳定性

当等离子体中通过大电流时，由于电流本身产生的磁场能量所驱动，产生所谓“腊肠”不稳定性和扭曲不稳定性，通称为**电流不稳定性**。它们是热核聚变研究的最初年代发现的最具破坏性的一类宏观不稳定性。下面我们用直观分析法进行分析并导出稳定性条件。

“腊肠”不稳定性

考虑在稀薄气体中通过电流入电所形成的直线箍缩等离子体柱（图4.2.1a, b）。设平衡时直柱半径为 a ，这时通过等离子体的电流 I_p 在柱面上产生的极向场为 $B_{\theta a} = \mu_0 I_p / 2\pi a$ 若柱内无纵向磁场，根据平衡条件是 $p = B_{\theta a}^2 / 2\mu_0$ 。但这个平衡是不稳定的。事实上，如果由于某种扰动产生了局部颈缩，则由于极向场 $B_{\theta} \propto 1/r$ ，该处的磁场增加，磁压强 $B_{\theta}^2 / 2\mu_0$ 增大，因而起始扰动将进一步增长。所以，局部颈缩一旦发生，它将继续迅速发展下去，趋向于使柱切断，这就是：

“腊肠”不稳定性。

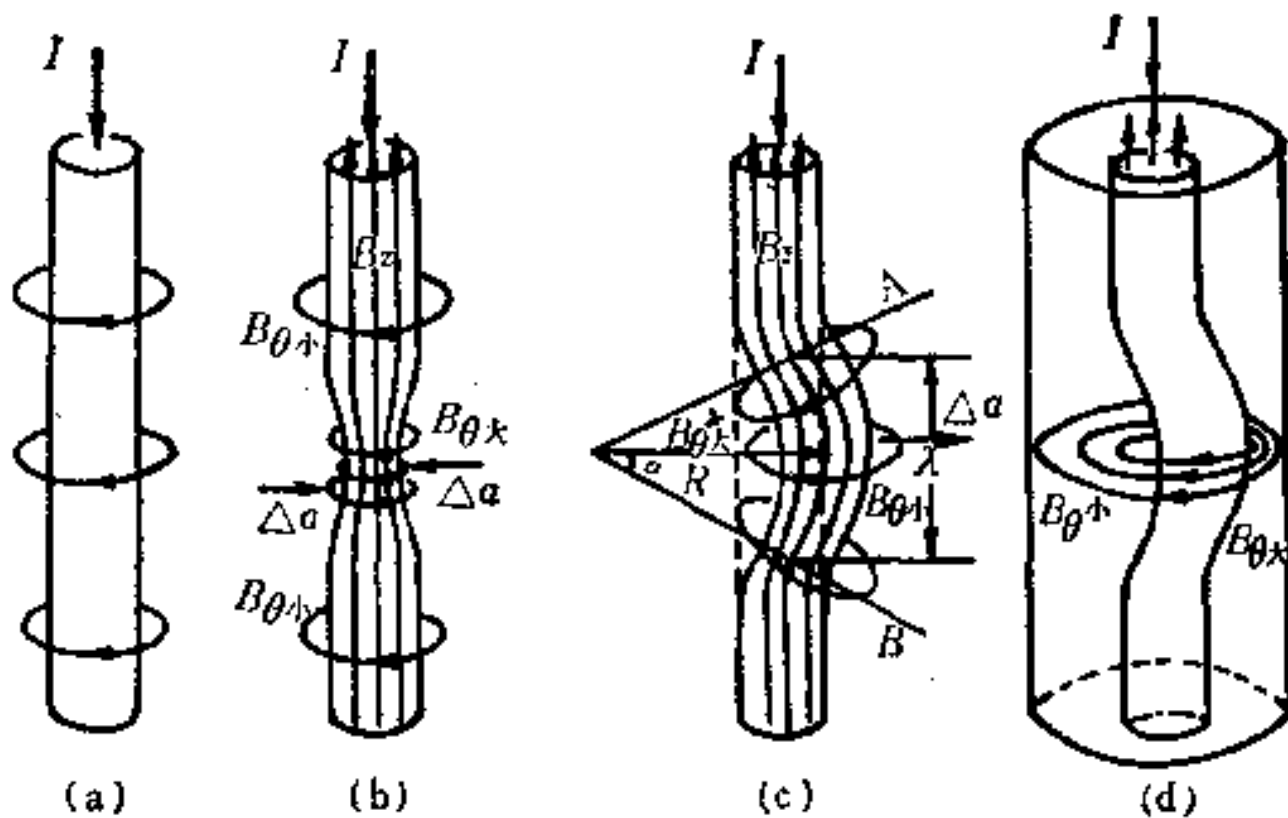


图4.2.1 电流不稳定性

(a) 平衡位形, (b) “腊肠”不稳定性, (c) 扭曲不稳定性, (d) 用导电壁来稳定。

这种不稳定性可通过箍缩前在柱内附加纵向磁场来使其转为稳定；当 $\sigma=\infty$ 时，此磁场冻结于柱内，因而柱的形变所引起的纵向磁场的弯曲将趋向于使柱恢复挺直。（磁力等效于与磁力线相垂直方向的压力 $B^2/2\mu_0$ 和沿磁力线方向的张力 B^2/μ_0 之和）

扭曲不稳定性

如果平衡等离子体柱受到偶然的局部微小弯曲，则由于凹边的极向磁场增加，凸边的减少，由此引起的磁压强差将使起始扰动进一步增长。若柱内未加有纵向磁场，则这种扰动将继续迅速发展下去，直至柱与器壁相碰，这就是扭曲不稳定性(见图4.2.1c)。若箍缩前在柱内捕获纵向磁场，则可以使短尺度扭曲不稳定性转为稳定。

4.3 瑞利-泰勒不稳定性

在经典流体力学中，在力场中轻流体支托住重流体的平衡位形是不稳定的。若交界面扰动的波数为 k ，则此不稳定性的增长率为 $\sqrt{gk}$ 。同理，当外力场不存在但此交界面有如图4.3.1所示指向重流体的加速度时，则此交界面对任一波数 k 的扰动来说也是不稳定的，其不稳定增长率为 $\sqrt{\alpha k}$ ；反之，若加速度指向轻流体时，则交界面是稳定的。瑞利早在1883年就已对这种不稳定性作出理论研究，泰勒推广了这一理论，并通过实验对它作出验证。

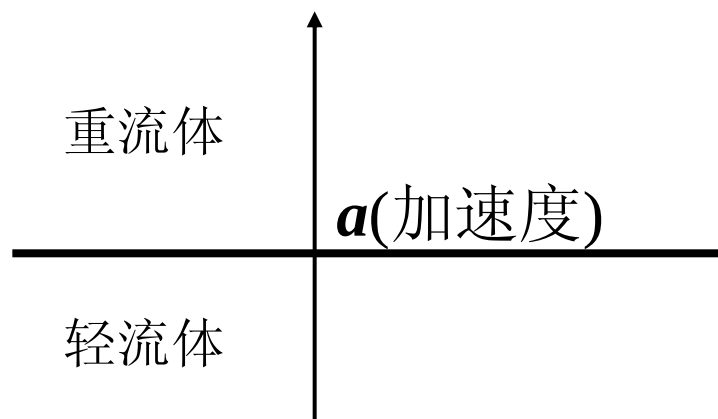


图4.3.1 加速度从轻流体指向重流体的不稳定位形

在磁流体力学中也有与此类似的情况。在重力场中磁场支托住等离子体的平衡位形是不稳定的，此不稳定性的增长率也是 $\sqrt{gk}$ 。同理，当外力场不存在而等离子体表面有指向等离子体的加速度 $\mathbf{a}$ 时，此等离子体表面也是不稳定的，其不稳定性的增长率为 $\sqrt{\alpha k}$ 。后一种不稳定性在所有快脉冲装置中都可能出现，磁场压缩所致等离子体表面加速度愈大，脉冲上升愈快，不稳定性的增长率就愈大。下面我们具体研究一下重力场中磁场—等离子体边界的不稳定性，进而研究磁力线弯曲引起的不稳定性。这种由于密度梯度、加速度指向引起的磁流体力学中不稳定性就归纳为**瑞利—泰勒不稳定性**。下面将得到一个等离子体中**瑞利—泰勒型**不稳定性的一般判据。

重力场中等离子体—磁场边界的不稳定性

设考虑图4.3.2a所示平衡位形，均匀等离子体充满平面上半空间，重力沿 $-z$ 方向作用于等离子体，等离子体内外有 x 方向的均匀磁场，而且 $z<0$ 处的磁场 B_- 大于等离子体内磁场 B_+ ，由此产生的磁压强差与重力相平衡。下面我们用单粒子轨道漂移近似理论分析上述平衡位形的稳定性。

设等离子体边界面的扰动位移为

$$\xi = \Delta z = \xi_0 \sin ky \quad [4.3.1]$$

其中扰动振幅 ξ_0 视为小量($\xi_0 \ll 2\pi/k, k = k_y$)。带电粒子在重力作用下将以速度

$$\mathbf{v}_{Dg} = m/(qB^2) \mathbf{g} \times \mathbf{B} = -mg/(qB) \mathbf{e}_y \quad [4.3.2]$$

沿 y 方向漂移，式中 B 为平均磁场强度（在低压强等离子体情形 $B \simeq B_+ \simeq B_-$ ）。漂移方向与电荷符号有关，正离子沿 $-y$ 方向、电子沿 $+y$ 方向移动，因而在等离子体边界面上引起电荷分离，形成面电荷，如图4.3.2b所示。面电荷产生电场 $\mathbf{E}$ ，引起电漂移

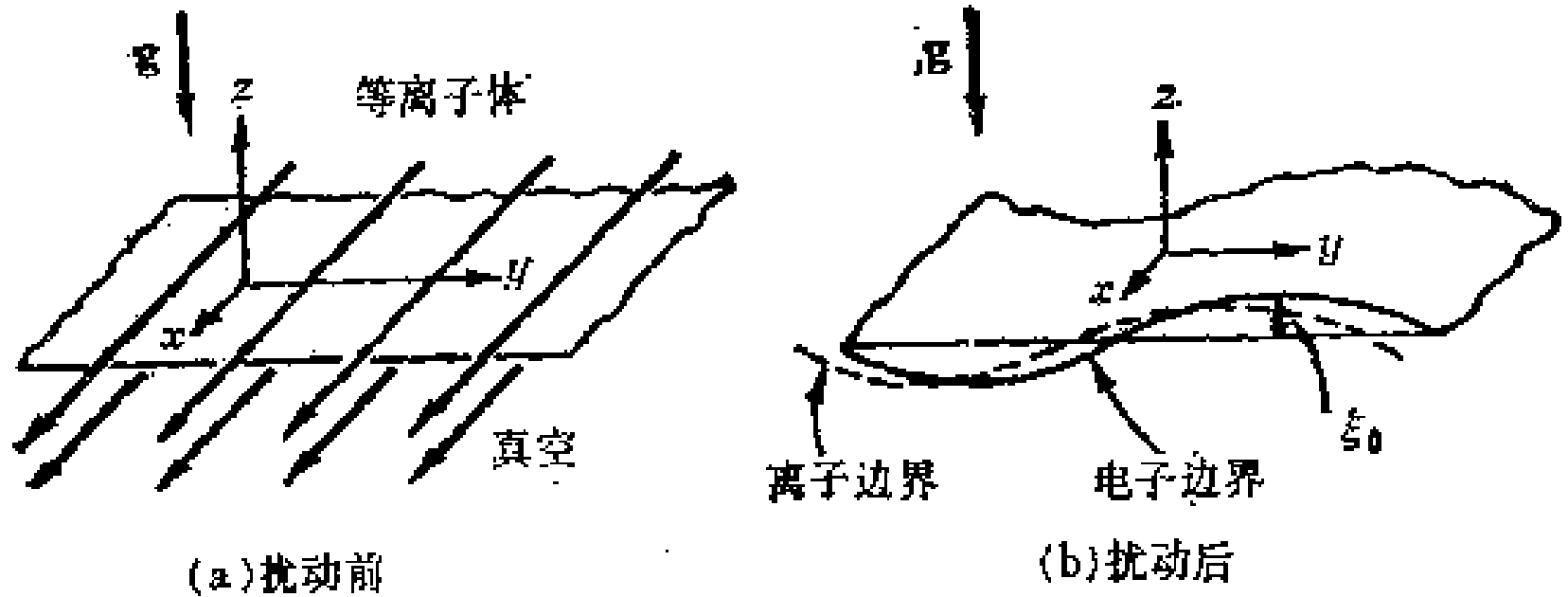


图4.3.2 重力场中等离子体—磁场边界不稳定性

$$\mathbf{v}_{DE} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2 \quad [4.3.3]$$

对于图4.3.2所示平衡位形，漂移方向指向使起始扰动增加的方向，因而所考虑的平衡位形是不稳定的。下面具体计算边界面上产生的电场和扰动增长率。因 $m_i \gg m_e$ ，以下我们仅考虑离子漂移。

由于扰动，在边界面上厚度为

$$v_{Dg} dt \sin \alpha \approx v_{Dg} dt \frac{d\xi}{dy}$$

的一层中的电荷将不会被中和（ α 为形变角，由于 ξ 很小 α 总是很小的）。所产生面电荷密度正比于未中和层的厚度，因此

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = n_i q v_{Dg} \xi_0 k \cos ky = -\frac{n_i m_i g}{B} \xi_0 k \cos ky \quad [4.3.4]$$

设把面电荷密度写成

$$\sigma \equiv \sigma_0 \cos ky \quad [4.3.5]$$

则由[4.3.5]式，有

$$\frac{d\sigma_0}{dt} = -\frac{\rho}{B} gk\xi_0 \tag{4.3.6}$$

其中 $\rho = n_i m_i$ 为质量密度。

现在计算面电荷[4.3.5]产生的电场。假定所有物理量沿x方向是均匀的。在面电荷之外静电标势满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

以及 ϕ 对y的正弦关系，可以推出 ϕ 对z的关系为 $\phi \sim e^{-kz}$ 。电场强度对z有同样的依赖关系。在等离子体边界面上，电感应矢量的垂直分量有一跃变：

$$\epsilon E_{\perp}^{(p)} - \epsilon_0 E_{\perp}^{(0)} = \sigma_0 \cos ky \tag{4.3.7}$$

其中 $\epsilon = \epsilon_0 + \rho_m / B^2$ 为等离子体介系数（见单粒子轨道理论中垂直于磁场的介电常数）。 设 $\epsilon/\epsilon_0 \gg 1$ ，则对等离子体内部的场我们得到

$$E_{\perp} = \frac{\sigma_0}{\epsilon} \cos kye^{-kz} \tag{4.3.8}$$

在小扰动($k\xi_0 \gg 1$)情况下, 显然 $E_z \approx E_\perp$ 成立。电场的另一个分量可由方程

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = 0$$

得到。于是等离子体内部的电场:

$$E_y = \frac{\sigma_0}{\varepsilon} \sin kye^{-kz} \quad [4.3.9]$$

$$E_z = \frac{\sigma_0}{\varepsilon} \cos kye^{-kz} \quad [4.3.10]$$

电场引起y和z方向的漂移:

$$v_y = \frac{\sigma_0}{\varepsilon B} \cos kye^{-kz} \quad [4.3.11]$$

$$v_z = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon B} \sin kye^{-kz} \quad [4.3.12]$$

在边界($kz \approx 0$)上有速度 v_z 意味着扰动幅度 ξ_0 随时间增大:

$$\frac{d\xi_0}{dt} = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon B} \quad [4.3-13]$$

由[4.3.6]和[4.3.13]式得到

$$\frac{d\xi_0}{dt^2} = -\frac{1}{\varepsilon B} \frac{d\sigma_0}{dt} = gk\xi_0 \quad [4.3.14]$$

此式给出边界面扰动幅度随时间变化:

$$\xi_0 = \hat{\xi}_0 e^{\pm\sqrt{gk}t} \quad [4.3.15]$$

由此可见, 当重力场中磁场支托住等离子体(这时重力加速度是从等离子体指向真空)的平衡位形受到扰动时(图4.3.2(b)), 扰动幅度按[4.3.15]式指数增长, 故此平衡是不稳定的, 不稳定增长率为

$$\gamma = \sqrt{gk}$$

[4.3.16]

在图4.3.2中若将等离子体和真空区或互换位置（这时重力加速度是从真空指向等离子体）结果会如何呢？显然这种情况对应于在上述分析中令 $g \rightarrow -g$ ，这时 γ 变为虚数，[4.3.15]式具有振荡性质，因此这种平衡位形是稳定的。

磁力线弯曲引起的不稳定性

上述不稳定性机制中本质的东西是重力引起的电荷分离。与磁场垂直的任何与电荷符号无关的力都会引起这种电荷分离。于是我们可以把上述结果加以推广，得到关于等离子体稳定性的如下一般判据：对于磁控等离子体，当在等离子体边界面上有与磁场垂直并与电荷符号无关的任何力作用时，如果力的方向是从等离子体指向真空，则系统是不稳定的，反之则为稳定。

特别是，在等离子体边界面上磁力线为弯曲的情形（图 4.3.3），磁力线曲率所致离心力 $mv_{\parallel}^2 / R$ 及垂直于磁场方向的磁场梯度所致力 $mv_{\perp}^2 / R$ 就是与电荷符号无关的并与磁场垂直的力，因此也都会引起瑞利-泰勒型的不稳定性。磁场中带电粒子的漂移速度是：

$$\vec{V}_{\text{DB}} = \frac{m(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 / 2)}{qBR^2} (\vec{R} \times \vec{B}) \quad [4.3.17]$$

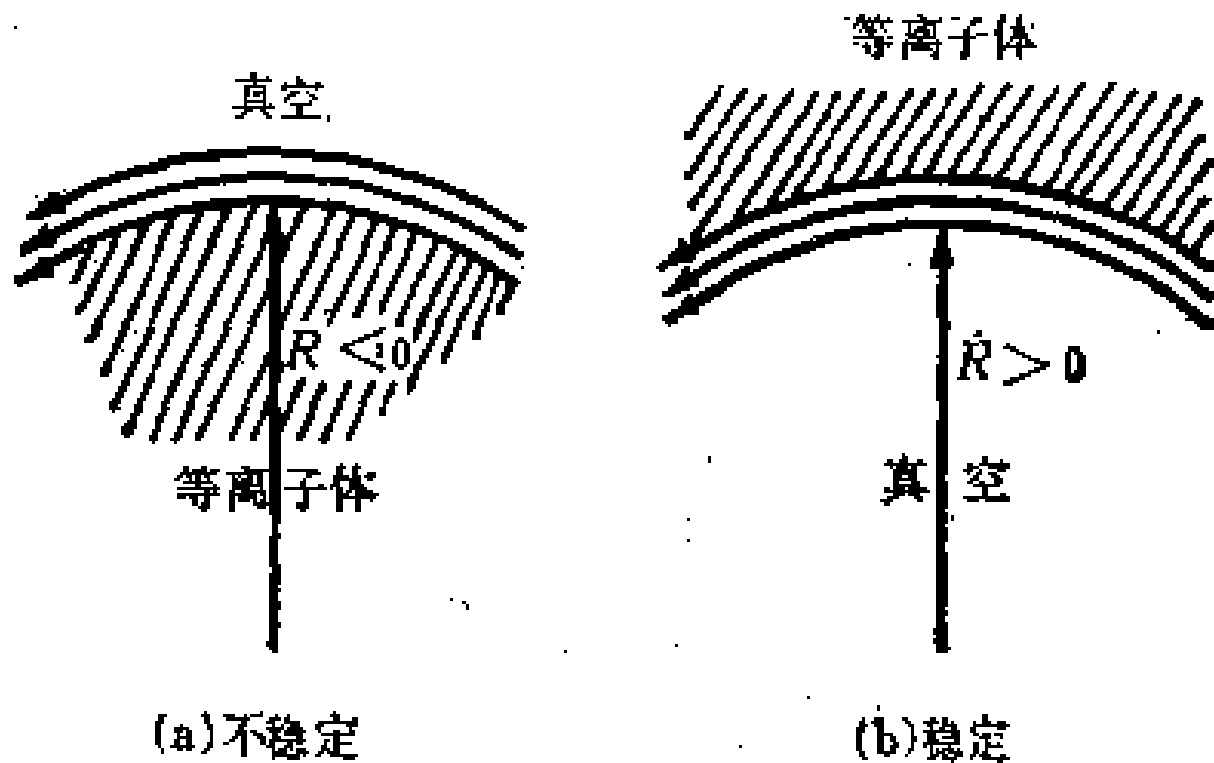


图4.3.3 磁场弯曲引起的稳定和不稳定性

里 R 为磁力线曲率半径。将[4.3.17]式与重力引起的漂移速度[4.3.2)式比较可见，磁力线弯曲引起的等效重力加速度为

$$\vec{g} \rightarrow \frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2 / 2}{R^2} \vec{R} = \frac{2W_{\parallel} + W_{\perp}}{mR^2} \vec{R} \quad [4.3.18]$$

其中 $W_{\parallel} = mv_{\parallel}^2 / 2, W_{\perp} = mv_{\perp}^2 / 2$ 。

由此可见，在磁约束等离子体的边界面上，如果磁力线处处凹向等离子体（ $R < 0$ ）则平衡位形是不稳定的：反之，如果磁力线处处凸向等离子体（ $R > 0$ ），则为稳定。这就是说，为了使磁约束等离子体平衡位形稳定，必须使等离子体处于磁场极小的区域，这就叫**磁阱**或**最小 B （Min. B ）**磁场稳定条件。

等离子体稳定性的上述判据，本质上是由于等离子体具有抗磁性因而问题倾向于磁场最小的区域移动的必然结果。

从物理上看。对于上面所讲在等离子体边界面上磁力线为弯曲的情形 (图4.3.3), 若磁力线的弯曲形成离开等离子体的状态, 电荷漂移引起的电场将阻碍对于平衡位置的偏离并恢复平衡。若磁力线的弯曲形成靠向等离子体的状态, 电荷漂移引起的电场将增大对于平衡位置的偏离并使得等离子体边界面不稳定。这种位形不稳定性又称为“**沟槽**”不稳定性。

4.4.交换不稳定性

磁场中的低 β 等离子体最容易产生的一种宏观不稳定性是所谓交换不稳定性。

设在磁控等离子体平衡位形中考虑一个由磁力线构成的磁通管，管内充满低热压强理想等离子体($\beta=p/(B^2/\rho\mu_0) \ll 1$)由于磁力线冻结在等离子体中，管的磁通沿整个磁通管保持常数，也不随时间改变。管中的等离子体像任何气体一样力图膨胀，因而磁通管问题力图扩张它的体积。但是在低 β 情形管的运动并不是自由的：任何明显改变磁场分布的运动将显著增加磁场能量，因而是允许的。这是因为在低 β 情形等离子体中的磁场同真空磁场几乎相等，而根据电磁学我们知道真空磁场位形是总磁能最小位形，所以任何使磁场形变的扰动必将增加磁场能量，然而低 β 情况下等离子体的膨胀能不足以补偿磁能增加。因此，只有磁场分布保持不变即管的起始位置和运动后达到的新位置上磁场保持不变的扰动才是允许的。这种扰动只可能是磁通量管相同的相邻的磁通量管连同其中的等离子体一起进行交换。如果交换的结果是等离子体内能减小，则这种扰动将继续迅速发展下去，引起所谓**交换不稳定性**（图4.4.2）。当这种不稳定性发展时，形迹是沿整个磁通管产生的，其形状如图4.4.1所示槽状，因此也中**槽纹不稳定性**。



图4.4.1 槽纹形变

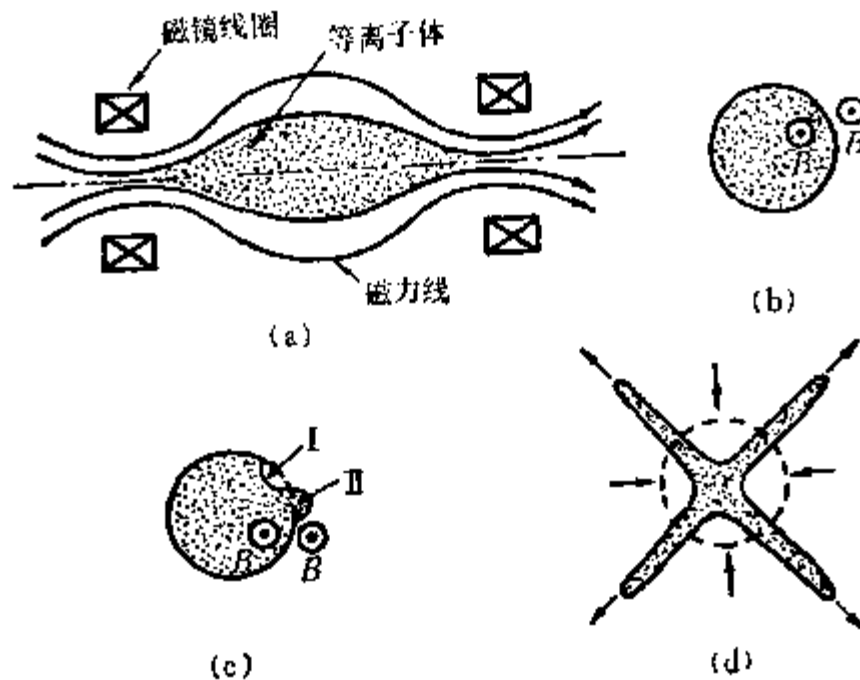


图4.4.2 交换不稳定性（槽纹不稳定性）

(a) 磁镜位形, (b) 横截面, (c) 交换扰动, (d) 交换不稳定性发展。

在上节里讲述的瑞利-泰勒不稳定性实质上是等离子体-磁场边界上产生的交换不稳定性。一般情况下磁控等离子体的磁场位形是复杂的，同一根磁力线既有凸向（ $R>0$ ）等离子体的部分也有凹向（ $R<0$ ）等离子体的部分，这种情况下交换不稳定性的稳定条件是什么？下面就来讨论这个问题。

考虑图4.4.2(a)所示磁镜位形，磁力线在中部区域为凹向等离子体，镜端部分为凸向等离子体。当带电粒子沿磁力线运动时既通过稳定曲率（ $R>0$ ）部分也通过不稳定曲率（ $R<0$ ）部分。这两个部分的等效重力加速度方向相反，因而扰动引起的电荷分离相反，这些电荷可以沿磁力线部分短路。这种情况下分析稳定性的有效方法是能量原理，这里我们将从热力学考虑出发进行分析。

设等离子体压强为标量，并且系统是轴对称的。我们来求交换扰动引起的系统位能变化。设把平衡时位于I区域的等离子体连同磁力线一起移到II区域，同时把位于区域II的等离子体连同磁力线一起移到I区域。这时系统位能变化是磁能和等离子体内能变化之和。先考虑磁能变化。

$$W_M = \int dV \frac{B^2}{2\mu_0} = \int S dl \frac{B^2}{2\mu_0} \quad [4.4.1]$$

这里 l 为管长， S 为横截面，最后一个积分是沿整个磁力线取的。由于沿着磁通管的磁通

$$\Phi = SB \quad [4.4.2]$$

为常数，故

$$W_M = \frac{\Phi^2}{2\mu_0} \int \frac{dl}{S} \quad [4.4.3]$$

于是交换磁通管 I 和 II 所引起的磁能变化为

$$\delta W_M = \frac{1}{2\mu_0} [(\Phi_1^2 \int_2 \frac{dl}{S} + \Phi_2^2 \int_1 \frac{dl}{S}) - (\Phi_1^2 \int_1 \frac{dl}{S} + \Phi_2^2 \int_2 \frac{dl}{S})] \quad [4.4.4]$$

由此可见，如果交换的是磁通量是相同的管子，则 $\delta W_M = 0$ 磁能保持不变。

在一个体积为 V 的等离子体中所包含的内能是

$$W_P = \frac{pV}{\gamma - 1} \quad [4.4.5]$$

这里为 γ 比热比。假定交换扰动是绝热地进行的，也即满足

$pV^\gamma = \text{常数}$ 。在等离子压强 p 标量的情况下，沿一磁力线 p 为常数。当管 I 和 II 中包含的等离子体作绝热交换时等离子体内能的变化，等于区域 I 的等离子体移到区域 II 时的变化加上区域 II 的等离子体移到区域 I 时的变化。前者等于

$$(p_{II}^c V_{II} - p_I V_I) / (\gamma - 1),$$

其中 p_{II}^c 为区域I的等离子体移到区域II的压强，由于是绝热过程，故有 $p_{II}^c V_{II}^\gamma = p_I V_I^\gamma$ ；后者也类似。因此交换引起的等离子体内能变化为

$$\begin{aligned} \delta W_p = & \frac{1}{\gamma - 1} [p_I \left(\frac{V_I}{V_{II}}\right)^\gamma V_{II} + p_{II} \left(\frac{V_{II}}{V_I}\right)^\gamma V_I] \\ & \text{(交换后)} \\ & - \frac{1}{\gamma - 1} [p_I V_I + p_{II} V_{II}] \\ & \text{(交换前)} \end{aligned} \quad [4.4.6]$$

因为两管靠近，故可以令

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= p_1 + \delta p, \\ V_2 &= V_1 + \delta V \end{aligned} \right\} \quad [4.4.7]$$

将[4.4.6]式(对含幂式)展开，保留到 δp δV 的二级小量，可得

$$\delta W_p = \delta p \delta V + \gamma p \frac{(\delta V)^2}{V} = V^{-\gamma} \delta(p V^\gamma) \delta V \quad [4.4.8]$$

稳定条件是 $\delta W = \delta W_M + \delta W_p = \Sigma \delta W_p > 0$ 。通常边界附近 $(p \rightarrow 0) \delta p < 0$ ，所以由[4.4.8]式，稳定条件为 $\delta V < 0$ 。由于磁通管的体积等于

$$V = \int dl S = \Phi \int \frac{dl}{B} \quad [4.4.9]$$

而磁通 Φ 为常数，故稳定条件可以写成

$$\delta \int \frac{dl}{B} < 0 \quad [4.4.10]$$

其中积分是沿磁通管的整个长度进行的。

由[4.4.9]可知，量 $\int_B^{\text{dl}}$ 表示磁通管的比容。于是稳定条件[4.4.10]告诉我们：任何沿等离子体压强减少的方向磁通管比容减少的平衡位形是交换稳定的，反之则为不稳定。这个结果是很自然的，

因为磁通管中的等离子体的象任何气体一样具有通过膨胀增加自己体积的自然倾向，也即包含等离子体的磁通管（磁力线冻结在理想导电的等离子体中）总是力图向增加 $\int \frac{dl}{B}$ （管的体积与它成比例）的方向运动。由此可见，量

$$W = - \int \frac{dl}{B} \quad [4.4.11]$$

起着类似于位能的作用。包含等离子体的磁通管总是力图向位能 W 更低的方向运动。如果等离子体位于 W 极小处，因而任何扰动引起的位能变化为正（ $\delta W > 0$ ），也即满足条件[4.4.10]，则平衡位形是交换稳定的。

另一方面，量 $\int \frac{dl}{B}$ 大体上和磁感应强度 B 沿磁力线的平均 $\bar{B}$ 成反比，故 $\bar{B}$ 越小 W 也就越小。因此，如果等离子体位于 $\bar{B}$ 极小处，就能满足[4.4.10]式。由此可见，稳定条件[4.4.10]式具有如下明确的物理意义：**磁约束等离子体交换稳定的充要条件是从等离子体边界向着外侧的所有方向平均磁场增加，也就是要造成<<平均最小 B (Min.) 磁场>>位形。**

4.5

气球模不稳定性

在研究低 β 等离子体的磁流体力学不稳定时，我们是以等离子体中产生的形变不引起磁场形变作为其出发点的。如前所述这种情况下扰动的唯一形式是磁通管的交换。然而，在 β 虽小但有限（或大于某个临界值）的情形，平衡位形中磁力线为凹向等离子体（磁场从等离子体向外侧减少）的那些部分就有可能产生磁通管向外弯曲的局部形变；同时，磁力线为凸向等离子体的部分却不受形变的影响，如同磁力线被冻结在导电端板上一样。上述形变过程中磁力线弯曲所消耗的功是由等离子体热压强引起的膨胀能来供给的。因此当 β 增大时，即使满足交换稳定条件[4.4-10]也还产生如图4.5.1等离子体边界的局部弯曲，进而破坏平衡位形。这种不稳定性叫作**气球模不稳定性**。



图4.5.1 气球模不稳定性。

另外，在有限电导率等离子体中也可能产生这类不稳定性。我们知道，在通常的交换不稳定性中，沿磁力线方向的波数 $k_{\parallel}$ 等于零（扰动波长为无限大），也即电子能够沿磁力线自由运动，但是由于等离子体电阻和电子惯性等原因使电子的自由运动受到阻碍，那么电荷分离和由此而产生的电场就不能及时被消除掉，从而沿磁力线方向。波长为有限的扰动将会发展，引起气球模不稳定性。

4.6 螺旋不稳定性

试考虑一个在均匀纵场 B_z 中箍缩的面电流等离子体柱。通过等离子体的电流 I_p 产生的极向磁力线处处凹向等离子体，因而它永远是导致不稳定性的磁场形态。极向场和纵场在柱外形成螺旋磁场（图4.6.1a）。为了说明问题方便起见暂时假定柱内纵场为零。柱面上沿螺旋磁力线作用的麦克斯韦张力总是力图使螺旋磁力线缩短而变直，因而螺距的扰动将最容易发展。这时等离子体柱被扭成螺旋状，直至达到没有极向磁场和磁能取可能的极小值（图4.6.1b）。但这种状态是不能保持的，因为所有的极向场能量这时已变成箍缩柱动能，柱具有很高的径向速度，因而最终将与器壁相碰。这种在电流的磁能驱动下产生的，等离子体被扭成螺旋状的不稳定性叫作**螺旋不稳定性**。

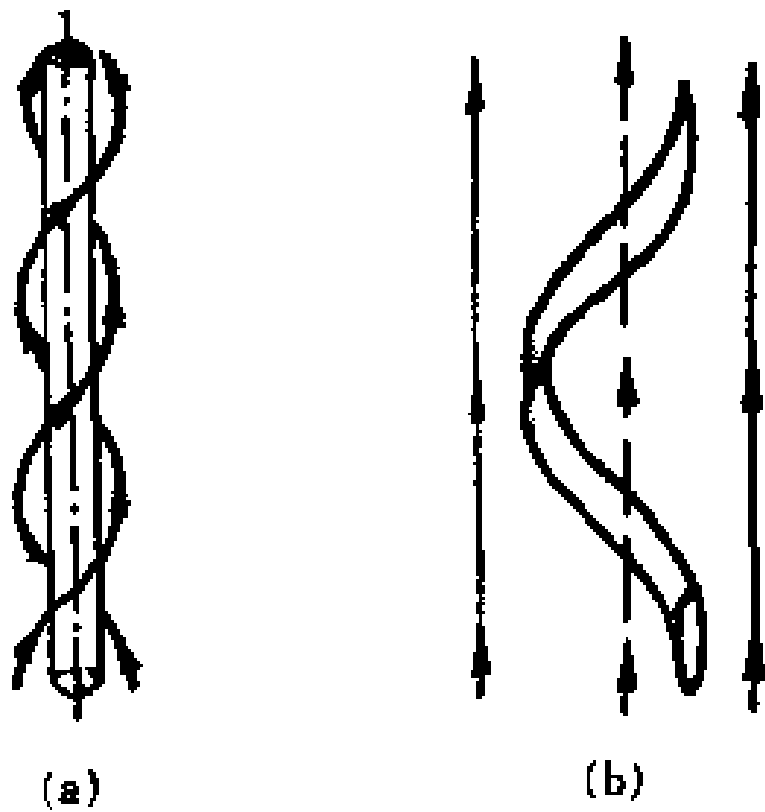


图4.6.1 螺旋不稳定性。

4.7 电阻不稳定性

在前面几节的讲述中，我们假定等离子体是电导率为无限大($\sigma=\infty$)的理想导电流体。在这种情况下，磁场将完全冻结在等离子体中，它们之间不可能有相对运动。但实际上等离子体电导率是有限的，因而磁力线并不是完全冻结在等离子体中和它一起运动，其结果不仅使理想导电流体假定下得到的不稳定性发生变化，而且会出现新的不稳定性。这些不稳定性主要有电阻性交换(重力)不稳定性，电流对流不稳定性，撕裂不稳定性。。

电阻性交换(重力)不稳定性

这是和理想导电流体中产生的交换(或槽纹)不稳定性相类似的一种不稳定性。我们知道,在磁力线冻结于等离子体中的情况下,非平均极小 B 磁场位形中最可能产生的是 $k_{\parallel}=0$ 的交换不稳定性。但是在有限电导率等离子体中, $k_{\parallel}\neq 0$ 的斜扰动也能引起不稳定性。

为了说明斜扰动的增长机制,考虑图4.7.1所示模型。设在平行于 z 轴的强磁场 B_0 中有一个扁平的等离子体层,其密度 $\rho_0(x)$ 沿 x 轴方向减小,重力(或等效重力)指向 x 轴方向。

假定在平衡等离子体中产生了如下形式的密度扰动:

$$\rho_1 \sim \exp(\gamma t + iky + ik_{\parallel}z) \quad [4.7.1]$$

$$\gamma \equiv i\omega \quad |\rho_1| \ll \rho_0$$

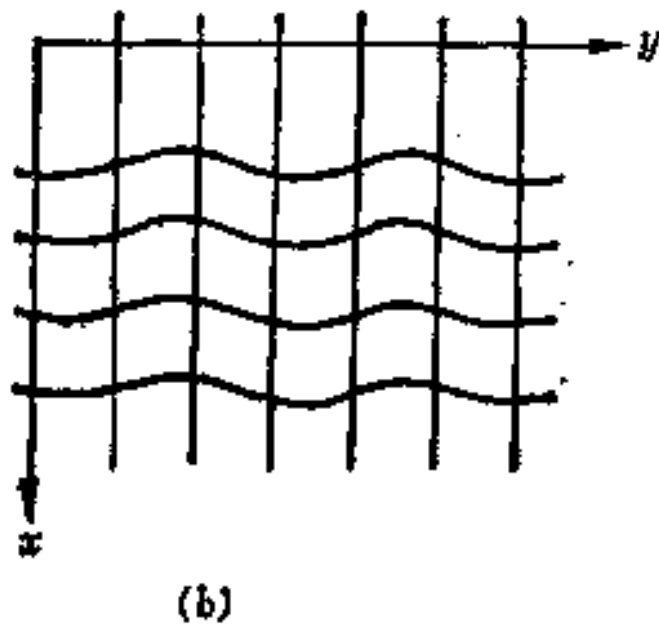
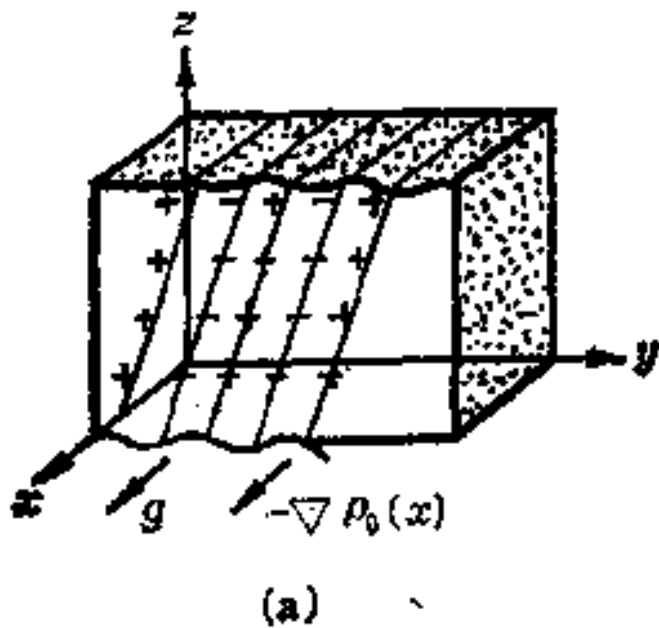


图4.7.1 电阻性交换（重力）不稳定性。
 (a) 形变增长模型， (b) 等密度线

这时平行于x轴的无数斜层将一前一后地交互排列，而在平行于xy面的各层平面中，等密度线具有如图4.7.1所示扰动波形。

由于存在垂直于 B_0 的重力，电子和离子沿y轴互相反方向漂移。在平衡状态，漂移运动不引起电荷分离。但是如果产生了随坐标y变化的密度扰动，则由于互相反方向运动的带电粒子流不能相互抵消而产生空间电荷(图 4.7.1a)。如果是理想导电流体，则由于电荷沿磁力线自由运动，这些空间电荷很快补偿掉，因而 $k_{\parallel}=k_z \neq 0$ 的斜扰动不可能增长。但是在有限电导率等离子体中，由于带电粒子的运动受到阻碍，这些空间电荷不能完全补偿。于是，电荷分离引起电场，产生电场漂移。当重力(或等效重力)和密度减小的方向一致时(图4.7.1a)，电场漂移将使起始扰动增长，引起不稳定性。

对于有限电导率等离子体，线性化的欧姆定律是

[4.7.2]

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 = \eta \mathbf{j}_1$$

其中 $\eta=1/\sigma$ 为电阻率。对上式两边取旋度并利用麦克斯韦方程不难得到感应方程。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}_1 &= \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B}_1 \\ &= (\mathbf{B}_0 \bullet \nabla) \mathbf{u}_1 - (\mathbf{u}_1 \bullet \nabla) \mathbf{B}_0 + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B}_1\end{aligned}\quad [4.7.3]$$

线性化的运动方程是

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} \right) = -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_1 + \rho_1 \mathbf{g} \quad [4.7.4]$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -(\mathbf{u}_1 \bullet \nabla) \rho_0 = u_x \chi \rho_0 \quad [4.7.5]$$

$$\chi \equiv -(\partial \rho_0 / \partial x) / \rho_0$$

$$\nabla \bullet \mathbf{u}_1 = 0 \quad [4.7.6]$$

这里假定等离子体是不可压缩的。

为简单起见，假定磁场 $\mathbf{B}_0$ 是均匀的($\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$)，并且所有的扰动量均不依赖于x，即

$$q_1 \sim \exp(\gamma t + iky + ik_{\parallel} z) \quad [4.7.7]$$

$$k_{\parallel} \ll k$$

将[4.7.3]-[4.7.7]各式对一个变量(例如 u_{1z})进行整理(家庭作业)，可得

$$\gamma^3 + \frac{\eta k^2}{\mu_0} \gamma^2 + (k_{\parallel}^2 v_A^2 - xg) \gamma - \frac{xg\eta}{\mu_0} k^2 = 0 \quad [4.7.8]$$

$$v_A^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0}$$

这即图4.7.1所示平衡位形对斜扰动的色散关系。当 $\eta=0$ 时，上式给出理想导电流体情形下的色散关系：

$$\omega^2 = k_{\parallel}^2 \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0} + \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dx} \quad [4.7.9]$$

为了考察有限电导率对稳定性的影响，以下我们只考虑 $\eta=0(\sigma=\infty)$ 时为稳定的参量特点，即 $k_{\parallel} v_A \geq \chi g$ 。在低 β 情形[4.7.8]式第三项中的 χg 可以略去（因由[4.3.18]式 $g \sim 2p_0/\rho_0 R$ ）如果我们考虑 $|\omega| \ll k_{\parallel} v_A$ 情形，则 γ^3 项也可以略去。这时色散关系[4.7.8]简化为

$$\gamma^2 + \frac{B^2}{\eta \rho_0} \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} \gamma - gx = 0 \quad [4.7.10]$$

对于缓慢变化的扰动， $|\omega|$ 很小， γ^2 项也可以略去，这时有

$$\gamma \cong \frac{xg\eta k^2}{\mu_0 v_A^2 k_{\parallel}^2} \quad [4.7.11]$$

由此可见，当 $xg>0$ 即重力加速度指向等离子体密度减小的方向时，有限电导率等离子体中的斜扰动将以[4.7.11]式所示增长率时间增长， η 和 $k/k_{\parallel}$ 愈大，不稳定性的增长率愈大。

电流对流不稳定性

在平衡等离子体中，沿磁力线方向有电流通过的情况下，如果垂直于磁场方向存在温度梯度，则产生所谓**电流对流不稳定性**。

设在 x 轴方向具有温度梯度 $-\nabla T_0(x)$ 的平衡等离子体中产生了温度扰动：

$$T_1 = T - T_0 \sim \exp(\gamma t + iky + ik_{\parallel} z)$$

由于等离子体电导率是温度的函数，温度扰动将引起电导率的扰动 $\sigma_1 = \partial\sigma_0/\partial x T_1$ 。电导率扰动引起纵向电流的变化。于是在扰动的斜层边界上产生电荷分离，如同电阻性交换（重力）不稳定性中密度扰动引起电荷分离一样，例如在 $d\rho_0/dx < 0$ 的平衡等离子体中，如果产生了图 4.7.2所示扰动，则斜层ABCD中的电导率将比未扰动区域的电导率大，因而纵向电流在它的边界上引起电荷分离。电荷分离产生电场，对于适当的 $k/k_{\parallel}$ 符号，电场（ E_y ）引起的漂移将使起始扰动增长，从而引起不稳定性。

根据欧姆定律，纵向扰动电流是

[4.7.12]

$$j_{1z} = \sigma_1 E_0 + \sigma_0 E_1$$

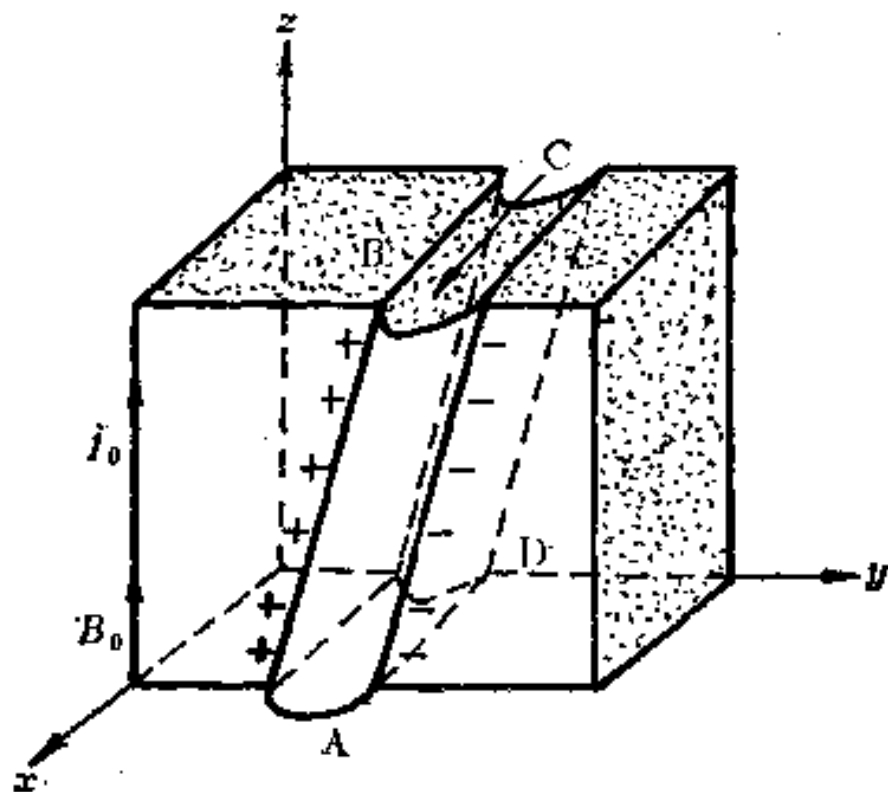


图4.7.2 电流对流螺旋不稳定性的形变增长模型。

这里 E_0 为平衡等离子体中的电场， E_1 为扰动电场(均在z方向)。离子和电子流体的连续方程是

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) = \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{E_{1y}}{B} \frac{\partial n_i}{\partial x} + n_i i k_{\parallel} u_{1zi} = 0 \quad [4.7.12a]$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = \frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{E_{1y}}{B} \frac{\partial n_e}{\partial x} + n_e i k_{\parallel} u_{1ze} = 0 \quad [4.7.12b]$$

扰动的增长时间远大于等离子体中电荷的弛豫时间，因此在所考虑的过程中可以认为等离子体是保持准电中性的。将[4.7.12a]和[4.7.12b]式相减，可得

$$n_i u_{1zi} - n_e u_{1ze} = 0$$

这就是说 $j_{1z}=0$ 。

考虑到非平衡的等离子体中能量通过漂移运动与物质一起移动，热平衡方程可以写成

$$\gamma T_1 + \frac{E_{1y}}{B} \frac{\partial T_0}{\partial x} = -\kappa_{\parallel} k_{\parallel}^2 T_1 \quad [4.7.13]$$

这里 $\kappa_{\parallel}$ 为等离子体的纵向热传导率。扰动电场的势具有形式 $\varphi_1 \sim \exp(\gamma t + iky + ik_{\parallel} z)$ （即 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ），故有

$$\frac{E_{1y}}{E_{1z}} = \frac{k}{k_{\parallel}}$$

从[4.7.12], [4.7.13]和条件 $j_{1z} = 0$ 可得

$$\gamma = -\kappa_{\parallel} k_{\parallel}^2 + \frac{E_0}{B} \frac{k}{k_{\parallel}} \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma_0}{dx} \quad [4.7.14]$$

在电子温度低的等离子体中热传导很小，故[4.7.14]式右方第一项可以忽略。这种 $k/k_{\parallel}$ 的符号和 $d\sigma/dx$ 的符号一致的斜扰动将会增长，引起电流对流不稳定性。

但是在高温等离子体中，当 $k_{\parallel}$ 不很小时，纵方向的热传导将使温度扰动很快调和掉。因此，只有 $k_{\parallel} \rightarrow 0$ 时增长率才变成很大的正值。

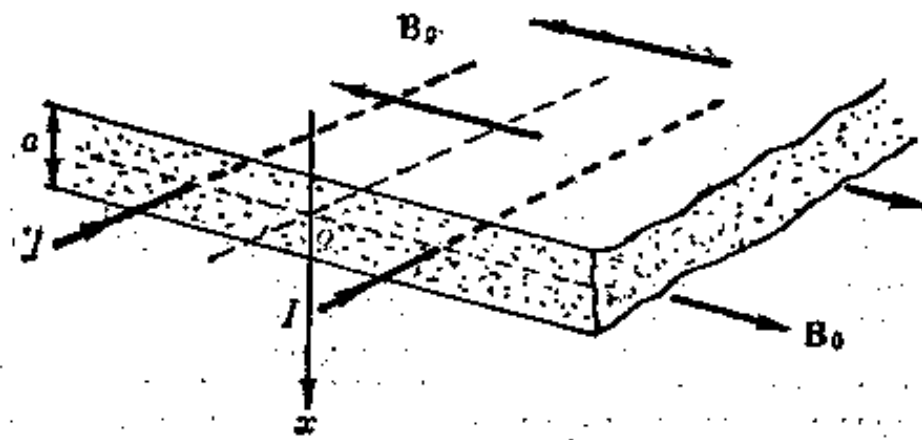
撕裂不稳定性

试考虑等离子体由无限扩展的片电流箍缩的情形。片电流在外面产生的磁场是均匀的，因此这种位形不会产生柱形箍缩中由于（极向）磁场径向减小而引起的那些不稳定性。这种情况下唯有等离子体的有限电导率引起一种不稳定性，即所谓撕裂不稳定性。外观上它是将等离子体撕裂成图4.7.3形式的一种长波模式，多出现在空间等离子体的边界层附近和各种箍缩过程中。

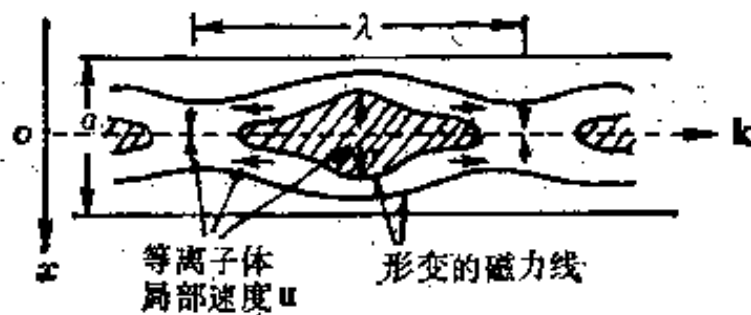
设在yz面上无限扩展的电流沿y轴方向流动（图4.7.3a）。这个电流在片的中心层（ $x=0$ 面）上下产生沿z轴但方向相反的磁场，并将等离子体箍缩，达到平衡状态。由欧姆定律

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 = \eta \mathbf{j}_1$$

[4.7.15]



(a) 片电流的平衡位形



(b) 撕裂不稳定形态

图4.7.3 撕裂模不稳定性。

可见，在 $x \approx 0$ 的中心层附近（那里 $\mathbf{B}_0 \sim 0$ ）电阻起重要作用，但在离中心层较远的地方 $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0$ 比较大，仍可以将等离子体看成是理想导电的。因此我们可以把片电流分成两个区域，即电阻性区域（ $|x| < \varepsilon$ ）和无电阻区域（ $a > |x| > \varepsilon$ ）。

若在电阻性区域里产生了 $B_{1x} \sim B_{1x}(x) \exp(\gamma t + ikz)$ 形式的扰动，则通过 $\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ 感应出垂直于（ k - x ）面的电场 $E_{1y} \sim \omega B_{1x} / k$ ，并由欧姆定律 $E_{1y} = \eta j_{1y}$ 产生同方向的电流 j_{1y} ，这个电流和磁场 $\mathbf{B}_0$ 产生的洛伦兹力总是指向使起始扰动增长的方向，从而最终将片电流撕裂成图4.7.3b所示形状。

下面我们简单地计算一下不稳定性的增长率。在电阻性区域，由欧姆定律 $\mathbf{E}_1 = \eta \mathbf{j}_1$ 和麦克斯韦方程，得

$$\partial \mathbf{B}_1 / \partial t = \eta \nabla^2 \mathbf{B}_1 / \mu_0 \quad [4.7.16]$$

对于 $B_{1x} \sim B_{1x}(x) \exp(\gamma t + ikz)$ 形式上的扰动，上式化为

$$\frac{d^2 B_{1x}}{dx^2} - \left(k^2 + \frac{\gamma \mu_0}{\eta}\right) B_{1x} = 0 \quad [4.7.17]$$

它的解是

$$B_{1x} \sim C \cosh(k^2 + \frac{\gamma\mu_0}{\eta})^{1/2} x \quad [4.7.18]$$

在无电阻区域，由欧姆定律 $\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0 = 0$ 和麦克斯韦方程 $\nabla \times \mathbf{E}_1 = \partial \mathbf{B}_1 / \partial t$ 得

$$iku_{1x} B_0 = \gamma B_{1x} \quad [4.7.19]$$

另一个联系 u_{1x} 和 B_{1x} 的方程可从运动方程 $\rho_0 d\mathbf{u}/dt = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p$ 和麦克斯韦方程 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ 得到；对运动方程取旋度可消去压强梯度项。假定等离子体为不可压缩 $\nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0$ ，以及利用 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，最后可以导出如下波动方程（家庭作业）

$$\frac{d^2 B_{1x}}{dx^2} - (k^2 + \frac{B_0''}{B_0}) B_{1x} = \frac{\gamma^2}{k^2 v_A^2} (\frac{d^2}{dx^2} - k^2) (\frac{B_{1x}}{B_0}) \quad [4.7.20a]$$

对于增长率不大即 $\gamma^2 \ll k^2 v_A^2$ 情形，上式可简化为

$$\frac{d^2 B_{1x}}{dx^2} - (k^2 + \frac{B_0''}{B_0}) B_{1x} = 0 \quad [4.7.20b]$$

这里 B_0'' 是 B_0 对 x 的二次微商。若 B_0 为均匀因而 $B_0''=0$ ，则方程[4.7.20b]简单地表示空间中的电磁截止模。然而，对于一个在 $|x| \leq a$ 中的约束的非均匀片电流 B_0''/B_0 是负的，如图4.7.4所示。这时对于小 k ，方程(4.7.20a)可给出正弦波解。例如，若令 $B_0''/B_0 = -\lambda^{-2}$ ，则方程式变成

$$\frac{d^2 B_{1x}}{dx^2} + (\frac{1}{\lambda^2} - k^2) B_{1x} = 0 \quad [4.7.21]$$

或

$$B_{1x} = C \sin(\frac{1}{\lambda^2} - k^2)^{1/2} x \quad [4.7.22]$$

将[4.7.22]式和 $|x| < \varepsilon$ 区域的解[4.7.18]在 $x = \varepsilon$ 上连接起来可以求得增长率

$$\gamma = \eta / \mu_0 f(k^2, \lambda^2, \varepsilon) \quad [4.7.23]$$

由[4.7.23]式已可以看出，不稳定性增长率与等离子体电阻率成比例。该不稳定性的驱动力是具有 $B_0''/B_0 < 0$ 非均匀磁场。若在z方向的扰动波长方向大于片电流的厚度

即， $k < \frac{1}{\lambda} \sim \frac{1}{\alpha}$ 。则对于具有有限电导率的等离子体将出现不稳定性。由于这种不稳定性，x型中性的点会把片电流撕裂成一段接着一段的小节（见图4.7.4）。

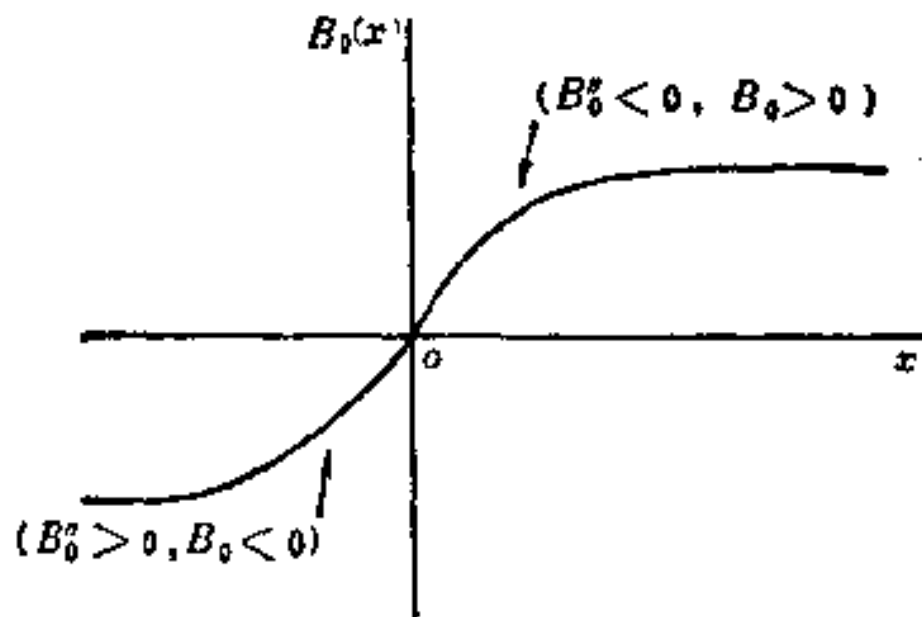


图4.7.4

4.8. 水龙带不稳定性

对于大的 $k_{\parallel} / k_{\perp}$ 的值，即在几乎平行与磁场的传播条件下，我们知道处于压力各向异性的磁流体中，波的色散关系是

$$\frac{\omega}{k} = v_A \left(1 - \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B^2 / \mu_0}\right)^{1/2} \quad [4.8.1]$$

在低数值 β 的情况下，当 $\beta_{\parallel} - \beta_{\perp} > 2$ 时从上述色散方程知道，这种振荡是不稳定的，其是不稳定增长率是的

$$\omega_I = \frac{k}{\rho^{1/2}} (p_{\parallel} - p_{\perp} - B^2 / \mu)^{1/2} \quad [4.8.2]$$

我们设想以下在引起磁力线稍微弯曲的小扰动，在磁力线上的粒子和（由于 $\mathbf{P}_{\parallel}$ ）沿磁力线运动的粒子都会对磁场实施离心力，这种离心力的作用就象水龙带管中的水一样，在沿水龙

管带向前跑的同时驱动横向扰动。但同时，这种驱动作用受到的垂直压力 $p_{\perp}$ 和磁场张力 B/μ_0 的阻碍，垂直压力 $p_{\perp}$ 和磁场张力 B/μ_0 是扰动的稳定因素。弯曲磁场的磁场强度是不均匀的并且根据垂直方向上磁矩大致守恒的原理说明如果粒子的垂直能量变大，则的磁场强度也变大。反过来，由于扰动使得磁场强度稍微变大，对应的所在空间的粒子的垂直能量也变大。因此，扰动增强一开始就受到了增大的粒子垂直能量的阻碍。但是，当扰动的驱动力 $P_{\parallel}$ 不能被稳定力 $p_{\perp}$ 和 B/μ_0 所平衡时，扰动就发展为不稳定。

这种不稳定性的物理机制类似于水压超过临界压力时水管中产生的振荡，故称为**水龙带不稳定性**。

4.9. 双流不稳定性

在一个等离子体系统中考虑离子静止不动电子相对与离子有一个整体速度 $\mathbf{u}_0$ 。并假定等离子体是冷等离子体 $T_i=T_e=0$ ，并且为了简化模型而去掉磁场的效应，令电子流沿着磁场 $\mathbf{B}$ 方向运动。这样在一级近似条件下，运动方程就为

$$m_i n_0 \partial \mathbf{u}_{i1} / \partial t = en_0 \mathbf{E}_1 \quad [4.9.1]$$

$$m_e n_0 [\partial \mathbf{u}_{e1} / \partial t + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_{e1}] = -en_0 \mathbf{E}_1 \quad [4.9.2]$$

其中因为离子不动和 $\mathbf{u}_0$ 是空间均匀的使得 $(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i0} = 0$ 以及 $(\mathbf{u}_{e1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 = 0$ ， $\mathbf{E}_1$ 是静电扰动电场量有解形式为 $\mathbf{E}_1 = E \exp i(kz - \omega t)$ 是，令 z 与 $\mathbf{u}_0$ 同方向。对上两个方程进行平面波分析得到

$$-i\omega m_i n_0 \mathbf{u}_{i1} = en_0 \mathbf{E}_1 \quad [4.9.3]$$

$$im_e n_0 (-\omega + k\mathbf{u}_0) \mathbf{u}_{e1} = -en_0 \mathbf{E}_1 \quad [4.9.4]$$

得到离子和电子的扰动速度为

$$\mathbf{u}_{i1} = ie\mathbf{E}_1 / \omega m_i \quad [4.9.5]$$

$$\mathbf{u}_{e1} = -ie\mathbf{E}_1 (m_e \omega - k\mathbf{u}_0) \quad [4.9.6]$$

离子和电子的连续性方程是

$$\partial n_{0i1}/\partial t + n_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}_{i1}) = 0 \quad [4.9.7]$$

$$\partial n_{0e1}/\partial t + n_0 (\nabla \cdot \mathbf{u}_{e1}) + (\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) n_{e1} = 0 \quad [4.9.8]$$

在物理模型中认为 $\mathbf{u}_{i0} = \nabla n_0 = 0$ ，且有 $n_{i1} (\nabla \cdot \mathbf{u}_{i0}) = (\mathbf{u}_{i0} \cdot \nabla) n_{i1} = (\mathbf{u}_{i1} \cdot \nabla) n_{i0} = 0$ ，对上两式进行平面波分析得到

$$n_{i1} = \frac{k n_0 u_{i1}}{\omega} \quad [4.9.9]$$

$$n_{e1} = \frac{k n_0 u_{e1}}{\omega - k u_0} \quad [4.9.10]$$

将方程[4.9.5]和[4.9.6]带入到上两式中得到

$$n_{i1} = \frac{ie k n_0 E}{m_i \omega} \quad [4.9.11]$$

$$n_{e1} = - \frac{ie k n_0 E}{m_e (\omega - k u_0)^2} \quad [4.9.12]$$

从上两式看出扰动产生了电荷不平衡。那么我们从泊松方程将扰动电场和扰动电荷密度联系起来得到

$$\varepsilon_0(\nabla \cdot \mathbf{E}_1) = e(n_{i1} - n_{e1}) \quad [4.9.13]$$

$$-\varepsilon_0 ikE = e(ienkE) \left[\frac{1}{m_i \omega^2} + \frac{1}{m_e (\omega - ku_0)^2} \right] \quad [4.9.14]$$

重写为

$$1 = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - ku_0)^2} \quad [4.9.15]$$

这里 ω_{pi} 和 ω_{pe} 是离子和电子的等离子体频率。色散关系方程[4.9.15]是一个关于 ω 的四次方程，原则上对于任意 k 可以求解，有四个根，一般情况下为复数 $\omega = \omega_R + i\omega_I$ ，当 $\omega_I > 0$ 时对应于波的增长解，当 $\omega_I = 0$ 时对应波的正常模不随时间变化，当 $\omega_I < 0$ 时对应于波的阻尼解。

当认为 $m_e/m_i \rightarrow 0$ 时方程[4.9.15]第一项可以忽略，变为

$$\omega = ku_0 \pm \omega_{pe} \quad [4.9.16]$$

当考虑 $m_e/m_i \neq 0$ 时方程[4.9.15]的特性需要整体考查。将色散方程右边作为一个函数 $F(\omega, k)$ 来看其对于 ω 和 k 变化趋势。

$$F(\omega, k) = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - ku_0)^2} \quad [4.9.17]$$

当给定 ku_0 时，函数 $F(\omega, k)$ 在 $\omega=0$ 和 $\omega = ku_0$ 有奇异点，如图4.9.1，线 $F(\omega, k)=1$ 给出满足色散关系的 ω 值。当函数 $F(\omega, k)=1$ 时的所有四个根均为实数时，流场引起粒子的扰动就是稳定的。这种情况对应与图4.9.1的左图。但在对应于图4.9.1右图的情况时，只有两个实根，其余两个是复数根，这种条件对应的扰动是不稳定的。

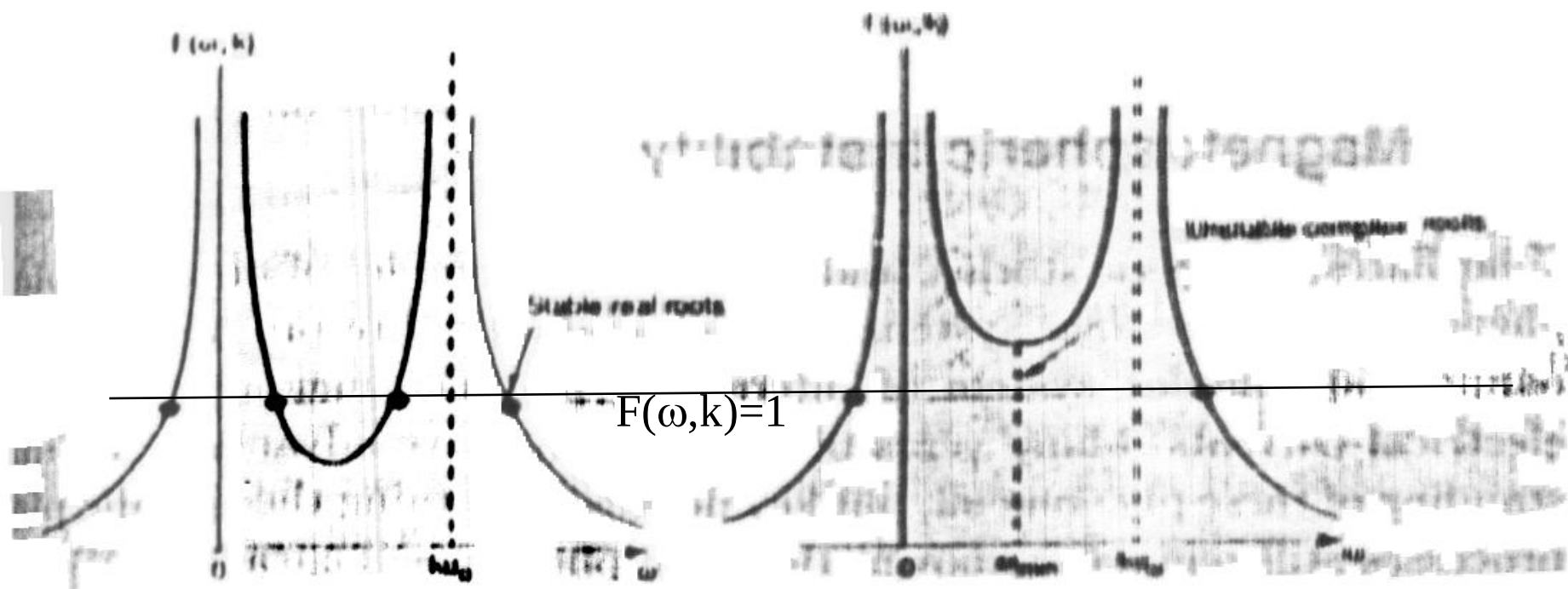


图4.9.1

实际上图4.9.1右图的情况对应于函数 $F(\omega, k)$ 的极小值大于1的条件。因此我们可以通过判断的函数 $F(\omega, k)$ 的极小值来确定波的不稳定范围。根据 $\partial F/\partial \omega=0$ 并假定 $m_e/m_i \ll 1$ 得到

$$\omega_{\min} = \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3} k^2 u_0^2 / \left(1 + \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3}\right) \approx \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3} k^2 u_0^2 \quad [4.9.18]$$

假定 $\omega/k u_0 \gg 1$ 并将方程[4.9.18]带入方程[4.9.17]得到

$$F_{\min}(\omega, k) \approx \frac{\omega_{pi}^2}{\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{2/3}} k^2 u_0^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 u_0^2} \quad [4.9.19]$$

由上式可以看出，当 $|k u_0| < \omega_{pe}$ 时， $F_{\min}(\omega, k) > 1$ ，由此可知不稳定的波数范围是

$$-\omega_{pe}/u_0 < k < \omega_{pe}/u_0 \quad [4.9.20]$$

这种由于电子和离子的不同流速的造成高频等离子体振荡引起的不稳定性就叫做**双流不稳定性**。

4. 10开尔文-霍姆霍兹不稳定性 (Kelvin-Helmholtz Instability)

在等离子体边界由速度剪切激发的低频磁流体波叫开尔文-霍姆霍兹波。在磁层顶的切向间断面附近被观测到，开尔文-霍姆霍兹波是低频表面波并且在一定条件下能增长起来变得不稳定，这种在磁流体边界上由于两种流体的相对速度剪切而激发的不稳定性就叫开尔文-霍姆霍兹不稳定性。这种不稳定性在太阳风与磁层交接面附近对物质运动起着有重要的作用。

考虑一个两边磁流体流速剪切的边界，为了简化模型我们认为是理想流体（ $\sigma=\infty$ ），不可压缩且压力各向同性，令 δ 和角标 0 分别代表扰动量和平衡物理量：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{U}_0 + \delta \mathbf{U} \\ p &= p_0 + \delta p \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \delta \mathbf{B} \end{aligned} \right\} \quad [4.10.1]$$

在直角坐标系中令 z 轴为是间断面的法线方向，对于切向间断， $\mathbf{U}_0$ 和 $\mathbf{B}_0$ 位于平面 xy 。扰动产生的波在 xy 平面内传播，并在 z 方向离开边界面而衰减，扰动物理量可以写为如下形式：

$$\exp i(k_x x + k_y y - \omega' t) - k_z z \quad [4.10.2]$$

这里是固定在边界面上观测到含有多普勒频移效应的频率。由于项 $k_z z$ 代表衰减，所以当 $z < 0$ 时 $k_z < 0$ ，，当 $z > 0$ 时， $k_z > 0$ 。对下列方程组进行表面波求解

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ (\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} \\ \rho d\mathbf{U} / dt &= -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \end{aligned} \right\} \quad [4.10.3]$$

我们可以获得

$$\begin{aligned} -i\omega' \delta \mathbf{B} &= \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{U}) - (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ &= \mathbf{B}_0 (\nabla \cdot \delta \mathbf{U}) - (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla) \delta \mathbf{B} \\ &= i\mathbf{k}_t \cdot (B_0 \delta \mathbf{U} - U_0 \delta \mathbf{B}) \end{aligned} \quad [4.10.4]$$

其中 $\omega' = \omega + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_0)$ ，利用 $\mathbf{k}_t = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y$ 重写上方程得

$$\omega \delta \mathbf{B} = B_0 (\mathbf{i} \mathbf{k}_t \cdot \delta \mathbf{U}) \quad [4.10.5]$$

由不可压缩条件得到

$$\mathbf{k}_\pm \cdot \delta \mathbf{U} = 0 \quad [4.10.6]$$

这里 $\mathbf{k}_\pm = (k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y) \pm i k_z \mathbf{e}_z$ ，是一个复数波数矢量，“+”号对应 $z > 0$ ，“-”号对应 $z < 0$ 。

对运动方程取到一级小量，利用

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla B^2 / 2 \\ &= (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \delta \mathbf{B} - \nabla (B_0^2 / 2 + \mathbf{B}_0 \cdot \delta \mathbf{B}) \\ &= (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}_\pm) \delta \mathbf{B} - \mathbf{k}_\pm (\mathbf{B}_0 \cdot \delta \mathbf{B}) \end{aligned}$$

得到

$$\omega \rho \delta \mathbf{U} - \mathbf{k}_\pm \delta p = - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}_t) \delta \mathbf{B} / \mu_0 + \mathbf{k}_\pm (\mathbf{B}_0 \cdot \delta \mathbf{B}) / \mu_0 \quad [4.10.7]$$

对总压强来 $p^* = p + B_0^2 / (2\mu_0)$ 说，当取到一级小量时有

$$\delta p^* = \delta p + (\mathbf{B}_0 \cdot \delta \mathbf{B}) / \mu_0 \quad [4.10.8]$$

联合方程[4.10.5], [4.10.7]和[4.10.8]得到

$$\kappa_{\pm} \delta p^* = \rho / \omega [\omega^2 - (\mathbf{B}_0 \cdot \kappa_t)^2 / (\mu_0 \rho)] \delta U \quad [4.10.9]$$

用矢量 $\kappa_{\pm}$ 点乘上方程左右两边并注意方程[4.10.6]得到

$$(\kappa_{\pm})^2 \delta p^* = 0 \quad [4.10.10]$$

如果总压不扰动 $\delta p^* = 0$ ，则从[4.10.9]就得到阿尔芬波的色散关系 $\omega / k = v_A = [(\mathbf{B}_0 \cdot \kappa_t)^2 / \mu_0 \rho]^{1/2}$ ，但若总压扰动 $\delta p^* \neq 0$ ，则

$$(\kappa_{\pm})^2 = 0 \quad [4.10.11]$$

也就是

$$k_t^2 = k_z^2 \quad [4.10.12]$$

方程[4.10.12]是表面波离开间断表面的衰减长度条件。

用矢量 $\mathbf{e}_z$ 点乘方程[4.10.9]左右两边并注意 $\mathbf{k}_\pm \cdot \mathbf{e}_z = \pm i k_z$ 得到

$$\pm i k_z \delta p^* = \rho / \omega [\omega^2 - (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}_t)^2 / (\mu_0 \rho)] \delta \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_z \quad [4.10.13]$$

上方程右边的 $\delta \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_z$ 可以写成

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_z &= d\delta z / dt \\ &= \partial \delta z / \partial t + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla) \delta z \\ &= i(\omega' - \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{k}) \delta z \\ &= i \omega \delta z \end{aligned} \quad [4.10.14]$$

因此方程[16.10.13]变为

$$\pm i k_z \delta p^* = [\omega^2 - (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{k})^2] \rho \delta z \quad [4.10.15]$$

其中 v_A 是沿着磁场传播的阿尔芬波的速度矢量。

我们认为横跨切向间断边界面的总压力和位移是连续的，这个边界条件使得两种流体组成的整个等离子体作为一个整体不至于断开或互相渗透。边界条件给出 $[\delta p^*] = 0$ ， $[\delta z] = 0$ ，那么 $[\delta p^*] = [A \delta z] = [A] \delta z = 0$ ，给出 $[A] = 0$ 。而A从方程[4.10.15]可以得到

$$A = [\omega^2 - (v_A \cdot k)^2] \rho / \pm i k_z \quad [4.10.16]$$

因此取横跨切向间断边界面的两边的参数带入到 $[A] = 0$ ，并注意 $\pm i k_z$ 在边界两边上的取“+”和“-”。我们就得到

$$\rho_1 [\omega_1^2 - (v_{A1} \cdot k)^2] + \rho_2 [\omega_2^2 - (v_{A2} \cdot k)^2] = 0 \quad [4.10.17]$$

其中角标1和2分别代表边界面两边的物理量。对于固定观测者而言， $\omega' = \omega_1 + (k \cdot U_{10})$ ， $\omega' = \omega_2 + (k \cdot U_{20})$ ，因而，就得到固定观测者参照坐标系中的色散方程：

$$\omega' = [\rho_1 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_{10}) + \rho_2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_{20})] / (\rho_1 + \rho_2) \pm \{ (\rho_1 + \rho_2) [\rho_1 (v_{A1} \cdot \mathbf{k})^2 + \rho_2 (v_{A2} \cdot \mathbf{k})^2] - \rho_1 \rho_2 (\Delta \mathbf{U} \cdot \mathbf{k})^2 \}^{1/2} / (\rho_1 + \rho_2) \quad [4.10.18]$$

其中 $\Delta \mathbf{U}$ 是切向间断边界面两边的相对剪切速度矢量， $v_{A1} = \mathbf{B}_{10} \cdot \mathbf{k} / (\mu_0 \rho_1)^{1/2}$ ， $v_{A2} = \mathbf{B}_{20} \cdot \mathbf{k} / (\mu_0 \rho_2)^{1/2}$ ， $\mathbf{B}_{10}$ 和 $\mathbf{B}_{20}$ 是切向间断边界面两边的零级磁场。方程[4.10.18]是开尔文-霍姆霍兹波的色散关系，当 ω' 含有正虚部时，开尔文-霍姆霍兹波是不稳定的。当 ω' 有正虚部的条件是

$$\rho_1 \rho_2 (\Delta \mathbf{U} \cdot \mathbf{k})^2 > (\rho_1 + \rho_2) [\rho_1 (v_{A1} \cdot \mathbf{k})^2 + \rho_2 (v_{A2} \cdot \mathbf{k})^2] \quad [4.10.19]$$

从上式看出边界面两边磁流体的相对剪切速度是问题的关键。磁场的张力总是阻碍企图拉伸磁力线的任何力，因此只有当速度剪切克服了的阻碍后波才能增长起来。如果 $\mathbf{B}_{10}$ 和 $\mathbf{B}_{20}$ 与 $\mathbf{k}$ 垂直，则不稳定性条件变为 $(\Delta \mathbf{U} \cdot \mathbf{k})^2 > 0$ ，这意味横跨切向间断边界面的任意小的速度剪切 $\Delta \mathbf{U}$ 都会引起绝对不稳定。

在一般情况下，这种波的增长率决定于磁场，波矢和速度剪切的相对方向。令 α 是 ΔU 与 k 之间的夹角；令 θ_1 是 B_{10} 与 k 之间的夹角；令 θ_2 是 B_{20} 与 k 之间的夹角；这种波的的不稳定条件就可写成

$$(\Delta U \cos \alpha)^2 > 1/\mu_0 [(B_1 \cos \theta_1)^2 + (B_2 \cos \theta_2)^2] (1/\rho_1 + 1/\rho_2) \quad [4.10.20]$$

当 ΔU 与 k 与平行时增正长率为最大。

在地球磁层顶的晨昏两侧附近，太阳风流场和行星磁场际流场与磁层边界层流场和磁场的位形就满足我们所讲的物理模型。会大量出现引起边界层的扰动的开尔文-霍姆霍兹波不稳定性。

第五章

补充内容(磁场重联)

各小节内容

5. 1.重联理论的概述

5. 2.稳态磁场重联的磁流体模型

5. 3. 非稳态磁场重联的磁流体模型

5. 4.瞬时磁场重联理论在近地空间中的应用举例模型

5.1 重联理论的概述

普遍认为磁场重联是宇宙等离子体中一个非常关键的过程。它决定着磁场的位形和磁能的快速转换。在太阳耀斑和磁层顶物质输运，亚暴等过程中起着主要的作用，在聚变等离子体中也有重联现象发生。

从能量交换的原理上认为，磁场重联是磁场中储存的能量与粒子中的热能和动能进行转换的过程。从磁冻结原理上认为，在大尺度问题中忽略了高阶项，这个高阶项是电阻率。但在某些边界层中，这个高阶项却起着主要控制作用，它影响着磁场的位形和流动形态。磁冻结理论在这个边界层中被打破。从数学上看，磁场重联是高非线性，是磁流体力学方程的奇异点。从等离子体的角度上看，磁场重联是由内部或外部因素引发了像撕裂模不稳定性和 $\mathbf{K}-\mathbf{H}$ 不稳定性等宏观不稳定性，促使磁场强度和等离子体流速、密度、温度等参量发生扰动，非线性增长以致饱和和改变方向的物理过程。

由第一章我们知道磁雷诺数定义为 $R_m = LV/\eta$ ， V 为等离子体特征速度， L 为特征长度。 η 为磁场的扩散系数。当 $R_m \gg 1$ 时，扩散就比较小，比较慢。由于特征长度是相对磁场而言而不是相对于整个位形。在局部区域， L 可能较小。比如在电流片中，或在某些磁场反向区中， L 相对来说就小些。磁场相对于流场的扩散时间尺度是 L^2/η ，磁场跑离局部区的时间是 L/V_A ， V_A 是阿尔芬速度，如果这两个时间相近，磁冻结原理就局部无效了。也就是讲，在远离扩散区的地方，磁冻结原则普遍适用，在扩散区，由于磁冻结原理被打破，与一种流体元相联系的磁力线在局部区断开，与另一种流体元相联系的磁力线与之相接。原先不同的磁力线现在通过磁场重联过程重新连成了同一条磁力线。其过程由图5.1.1表示出。

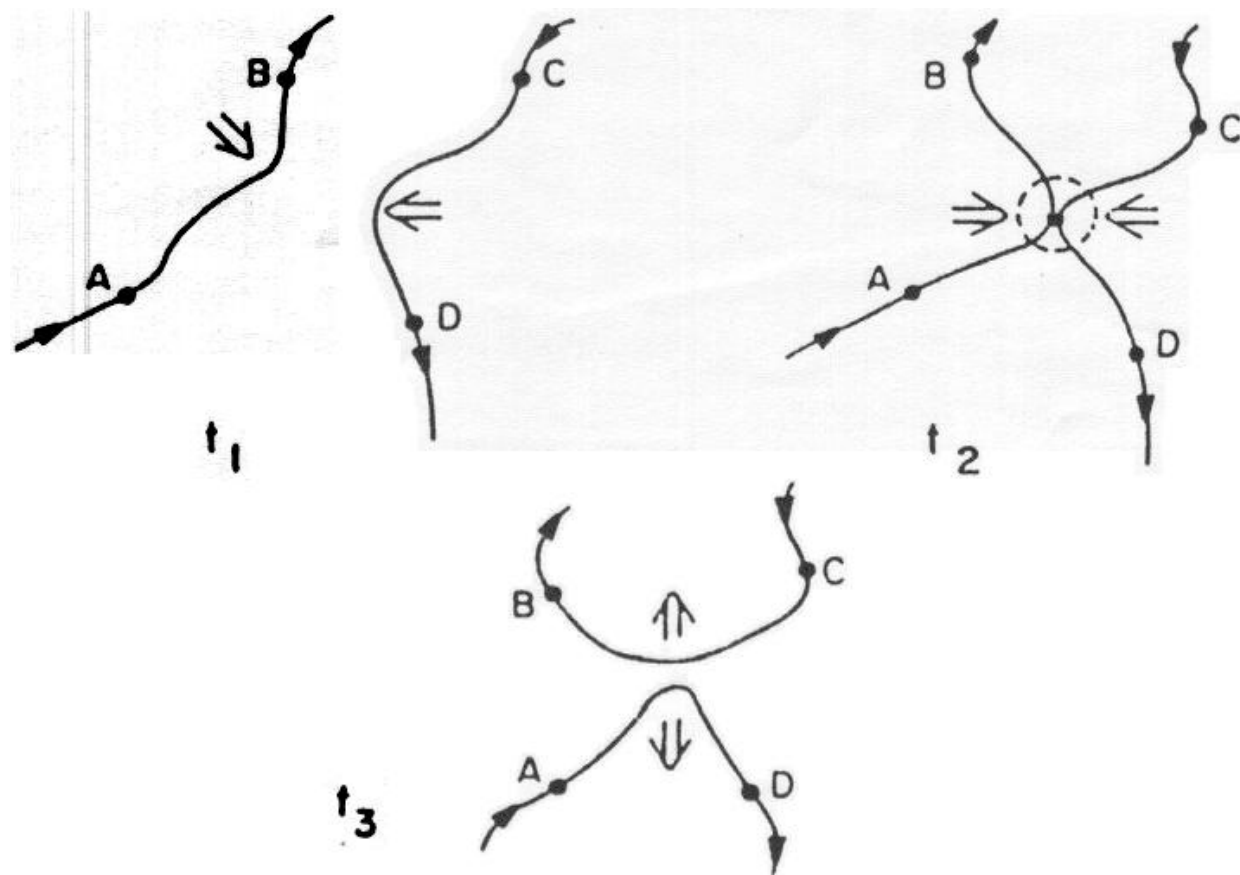


图5.1.1 在时间 t_1 流体元A和B在一条磁力线上，C和D在另一条磁力线上，这两条磁力线大致反向，并相互反平行接近。在时间 t_2 ，这两条线在A和B的中间段与C和D的中间段相接触。在时间 t_3 ，A与B之间的联系和C与D之间的联系被割断了。A和D在一条磁力线上，B和C在另一条磁力线上了，这两个磁力线相互离开。这就是磁场重联过程的形象描述。

Maxwell应力张量的作用是把流体驱出可能的重联区，磁力线弯曲犹如弹性弦一样有反向弹射之力。典型的重联区是X点，如图5.1.2，磁场能量非常容易地变换到流体的焓和动能是极有可能的。磁场位形和流动形态很可能与 $\eta=0$ 时大不相同。这并不是指电导率大就够了，如果L值也小的话，就可以抵消这种效应。流体压力梯度加大可以平衡**Maxwell**应力。这样可以防止流体离开重联区。压力梯度产生于决定大尺度位形和流动形态的外部条件的作用结果。也就是讲，重联率由边界条件和初始条件所决定，而不是由介质的局部特性（例如电导率等）来决定。

AROUND t_2

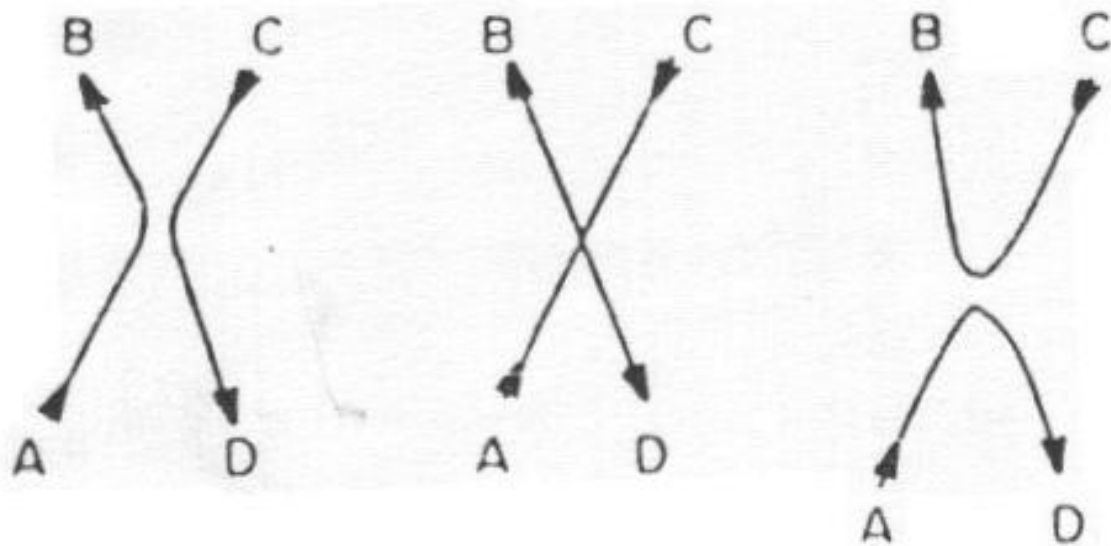


图5.1.2 在图5.1.1中时间 t_2 左右磁场重联事件发生点附近，连接流体元A、B、C、D的磁力线瞬时构成了x型中性点.

如果磁冻结条件成立，等离子体混合于通量管中，且并不越过通量管跑到外面去。因此，等离子体沿通量管的特性相对一致。但管与管之间的差别可以是突变性的。如果等离子体来于同一个源中，那末大的变化是不可能的。然而，如果两个基本等离子体区域相互作用，因为它们不可能互相混合，所以，一个薄的边界层将这些来源于不同区域的等离子体区分开来。

边界层两边的磁场对边界来说是相切的，但方向和强度大小有可能不一样。这就是对电流片的描述。磁冻结概念勾划出了大的相对均匀等离子区被相对薄的电流片，例如磁层顶把其它区域（通常是源于不同的区域）相分开的图象。正如我们要看到的那样，正是在这些电流片区域内，磁冻结观念被打破了。

我们考虑一维边界层将两个大小相等方向相反的磁场区分开时的演化情况，探讨磁重联的概念。假定没有等离子体流，那么，磁扩散方程变为纯扩散性的方程：

$$\delta B_x / \delta t = 1 / \mu_0 \sigma \cdot \delta^2 B_x / \delta z^2 \quad [5.1.1]$$

这里我们考虑磁场在x方向，z方向是边界层的法向方向。假定最初边界层无限薄，那末方程[5.1.1]的解为误差函数：

$$B_x(z) = B_0 \operatorname{erf}\{(\mu_0 \sigma / 2t)^{1/2} z\} \quad [5.1.2]$$

其中

$$\operatorname{erf}(u) = 2 / \pi^{1/2} \int_0^u e^{-v^2} dv \quad [5.1.3]$$

对于这个解，电流密度是高斯分布的，其宽度是随着时间变化的，但只是 $t^{1/2}$ 的形式。磁场沿着梯度向中心面扩散，与从另一边来的反向磁场汇合而湮灭。这样一来就减小了磁场梯度，也减小了扩散率并减慢了整个过程。过程是自我限制的。然而，磁能通过焦耳加热被转换成热能，结果，热压的增加刚好用来平衡磁压的减少。

为了稳定地维持这个过程，像图5.1.3那样，流体必须以湮灭的速率把磁场传输到边界。在y方向上加一电场，我们把从外面来的入流作为边界条件来处理。我们把入流与湮灭率相匹配来获得平衡。我们能够很快看到入流越快，平衡梯度越陡，为了更快地扩散，反过来又要求大的湮灭率或者能量释放速度。

在稳态情况下（ $\delta/\delta t=0$ ），所加的电场E必须是空间均匀的。从Faraday定律我们得到

$$\nabla \times \mathbf{E} = \delta \mathbf{B} / \delta t = 0 \quad [5.1.4]$$

这个方程的分量形式为：

$$\delta E_y / \delta z = 0 \quad [5.1.5]$$

意味着E在各处都是同一的。我们将在两种形式下应用欧姆定律。在完全没有电流的情况下， $\mathbf{E} = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ 给出

$$E_y = u B_0 \quad [5.1.6]$$

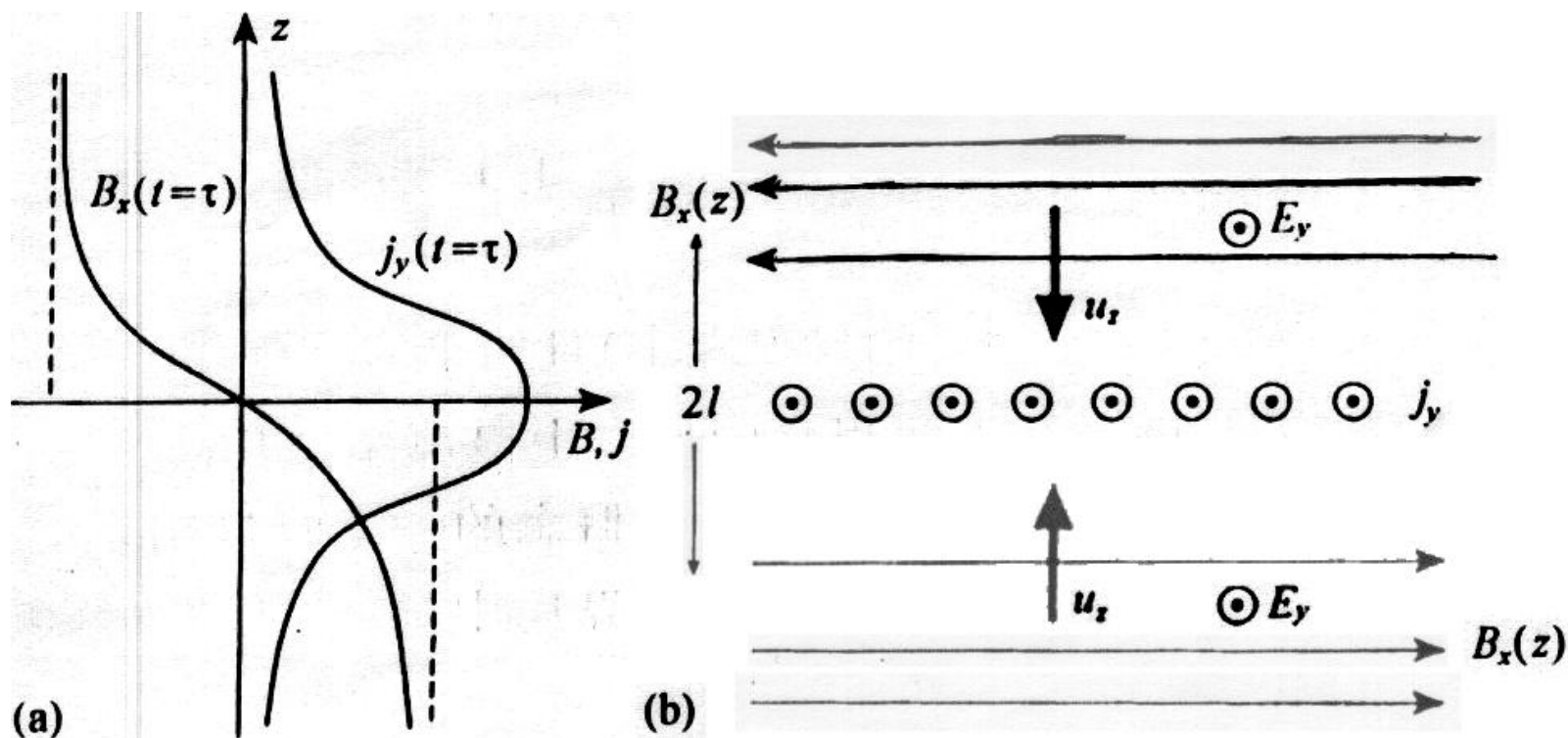


图5.1.3 (a) 方程[5.1.4]的解，表明横跨理想电流片的磁场和电流。当磁通量在中间的($z=0$)平面湮灭时，电流的高斯分布加宽。(b) 在 $x-z$ 平面的电流片的简图，表明了入流是向着 $z=0$ 平面，电流在 y 方向流动把两个反向的磁场区隔离开来。

其中 u 是入流速度， B_0 是在 z 较大处的磁场强度。在电流片的中心， B 消失，欧姆定律变成

$$E=j/\sigma \text{ 或 } E_y=j_y/\sigma \quad [5.1.7]$$

如果电流片厚度是 $2l$ ，在穿越电流片处应用安培定律给出

$$j_y=B_0/(\mu_0 l) \quad [5.1.8]$$

综合方程[5.1.6]、[5.1.7]和[5.1.8]而得

$$l=1/(\mu_0 \sigma u) \quad [5.1.9]$$

用作为长度尺度的 l 和作为速度尺度的入流速度而导出的磁雷诺数 $R_m=LV/\eta$ 等于单位1。这意味着电流片的厚度被调整到在电流片边缘扩散和对流达到平衡。换句话说，电流片的厚度由平衡所决定。结果，因为电流片与整个区域的尺度相比非常薄，由此而我们从整体尺度可以获得非常大的 R_m 值。

在引进等离子体入流时，我们产生了一个非物理的图象。虽然有等离子体入流，但我们并没有提供等离子体逃逸此系统的机制。为了做到这一点，我们必须引入第二方向使得湮灭只发生在有限的磁力线范围内。这样一来就出现了我们称之为X-线的重联图象，在图5.1.4中可看到

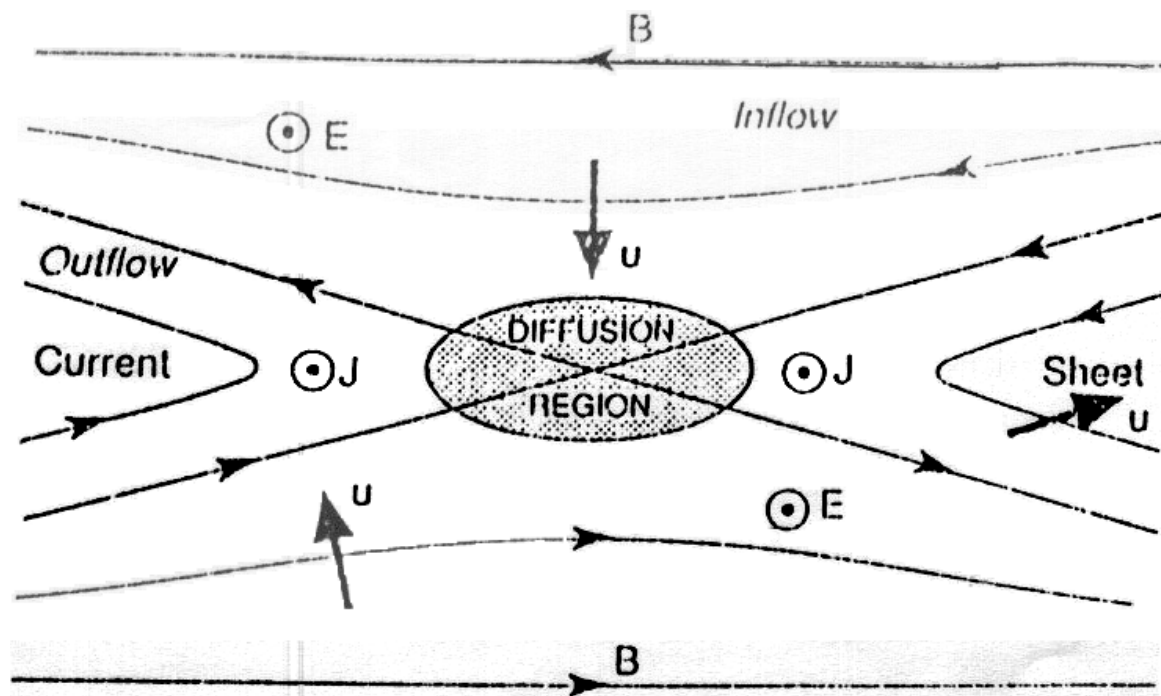


图5.1.4 发生在磁场x中性点的磁重联的示意图。等离子体和磁场从图的上方和下方流进并从两边流出。只在 $R_m < 1$ 的扩散区，等离子体才不与磁场栓在一块。

在图5.1.4中，磁场强度在整个平面图内并不是为零，只有在中心把图分割开来的单一的一条线上，其才为零。此磁场位形被称为X型中性线。为了维持稳态，如方程[5.1.5]所给出的那样，仍然需要来自于纸外方向的均匀电场 E 。此电场在图的上下两方驱动入流，在图的左右两方驱动出流。在X线周围小的阴影区中，磁雷诺数小于单位一，此区被称为扩散区。

这里我们有一个根本上不相同的物理图象。磁力线从上方和下方进入扩散区，磁力线不是消失，而是从两边出去了。在这个过程中，它们与不同的磁力线相切割和重联。来源于不同通量管的等离子体，出自不同区域，现在却发现在同一个通量管中。这完全违背了磁冻结概念。以前，电流片分隔两个磁场区，现在磁通量管却通过了电流片。换言之，我们现在有了一个有限法向分量的开边界，完全相反于以前的封闭边界。等离子体可以沿着磁力线通过边界。

另一个重要结果是尽管进入扩散区的磁场宽度有限，这个过程却影响整个通量管。等离子体体现在自由地从一个区域跑到另一个区域，根本上改变了边界的性质。

首次提出重联是为了解释一种以耗费磁场能量获得快速等离子体加热的过程，这个过程发生在太阳耀斑中。确实，在基本的X线位形中，入流所携带的磁场能量用于出流中的等离子体加热和加速去了，此过程有多快是非常重要的问题。然而，正是这种磁场连接或拓扑的改变给出了更深奥的效应，因为它使得在以前是非连接的区域中可以进行快速的等离子体交换，当然也能进行质量，动量和能量快速的交换。

早在上个世纪四十年代人们就开始注意磁场重联了,直到人们意识到磁场重联过程对储存在太阳、行星际、恒星际和天体物理的磁场中的有效能量释放是必不可少的环节时,关于磁场重联的研究才变得重要和热门起来。

在理想磁流体中,由于缺少磁耗散,在磁能变化的过程中不能产生热。而在局部非理想磁流体的磁场重联过程中,由于有限等效电导率的存在,磁能可以转变成动能和热能。

在空间物理中区别理想磁流体动力学过程和非理想磁流体动力学过程是非常重要的。在理想磁流体动力学过程中的磁耗散时间尺度要比其他的动力过程的时间尺度大(慢)许多个数量级。例如在太阳耀斑的磁能释放过程中典型的时间尺度是100秒,其对应的空间尺度是 10^5km ,在这个空间尺度上而磁场的耗散时间尺度是 10^6 年。由此可见太阳耀斑过程中磁场耗散过程比磁能变化的时间尺度慢许多个数量级。太阳耀斑过程和磁层亚暴过程中涉及磁能大量转换的时间尺度是几个阿尔芬时间(d/v_A)。如此快的程度在理想磁流体动力学过程中可以达到,但在非理想磁流体动力学过程中就达不到。虽然理想磁流体动力学过程

可以进行快速的能量转换，但是由于缺乏耗散的位形限制，转化的量并不大。磁场重联并不受位形的限制，因而能够释放大量的磁能。

研究磁场重联的目的为了能够解释重联如何在足够短的时间尺度内发生。动理论主要用来获得一种产生快速耗散过程的反常电阻机制。磁流体力学主要用来获得一种极大地缩小有效耗散尺度的几何位形。把这两种方法结合进行分析可以研究一些特殊的现象。

例如，人们认为与极光亚暴现象发生相关而起始于磁尾的重联，其引发机制是离子撕裂模不稳定性，这种离子撕裂模不稳定性一方面与波粒相互作用有关。另一方面又要求磁尾电流片在不稳定性发生时要变的比平常薄。磁尾电流片厚度一般是7000km（相当于一个地球半径），而在磁尾撕裂模不稳定性增长起来要求的厚度是200km（接近离子的回旋半径）。因此，磁流体力学研究者总是想方设法建立模型来确定是什么太阳风条件激发磁尾电流片厚度的变薄（几何位形的改变）。

上个世纪四十年代由**R.G.Giovaelli(1946)**和**Hoyle(1949)**最先提出重联过程的概念，当时他们只是说明磁场X型中性点出现在是在太阳耀斑和极光亚暴中等离子体加热和加速的区域里。他们的研究兴趣来源于认识到除非有平行于磁场的电场存在，否则一般磁场总是倾向于抑制粒子加速的事实。早期的研究者一般认为电子很快就把平行电场抹掉了。而磁场为零的点或者区域被认为是粒子加速不受磁场干扰的最佳位置。磁场零点出现在两种或多种不同来源的磁场之间的边界区域。例如在来源于太阳的行星际磁场和来源于地球磁层磁场之间在磁层顶附近的交界面就会出现这种磁场位形。假如在这种磁场为零的点或者区域存在电场，那么带电粒子就会一直加速直到磁场不可忽略的区域为止。这种加速观点现在有些过时，因为已经发展了许多并不需要磁场零点的粒子加速机制。这些粒子加速机制只需要的是电场和磁场在空间上的不均匀性或者在时间上有某种变化。

在1953年Cowling就认为如果太阳耀斑是起源于欧姆耗散，那末电流片只需要几米厚就可以提供能量转换。同年J.W. Dungey表明这种电流片确实可以由X型中性点磁场的塌缩形成，他第一个提出“磁力线能被破裂并且能重新联接”的概念。Dungey表明了磁场和粒子的在X型中性点区域的自洽行为，其研究模型只是在给定电场和磁场位形的情况下考虑了带电粒子的运动。运动的带电粒子本身也是一个电场和磁场的产生源。等离子体的自身场在麦克斯韦方程组和牛顿运动方程也是应当加以考虑的部分。为了分析这些场的效应，Dungey在MHD方程中忽略了等离子体的热压力，结果发现在磁场的零点附近小扰动可以导致电流片的爆发性形成。在磁场的零点附近由电流扰动引起的等离子体运动反过来引起电流的增长，而电流又进一步增强等离子体的运动，从而形成正反馈。

在Dungey完成关于电流片的先驱者的研究工作之后，Sweet和parker是第一批用简单MHD模型描述在由磁场零点形成的电流片中稳态磁场重联过程的研究者。在1956年sweet就强调了等离子体压力和远离X型中性点区域的外部条件可能会在电流片的形成中起着重要作用。在太阳耀斑的模型中，他已经考虑了起源于光球层的X型中性点区域的磁场行为。如果不同源的磁场相互接近这些磁场仍然保持冻结在等离子体上，就会在磁场的零点附近形成一个他自己称之为“碰撞层”的薄层。从磁流体平衡的角度来看，在这个磁场极小的电流片中心薄层，等离子体压力和远离X型中性点区域的外部磁压相当。就像流体被两个互相接近的平板挤出平板之间的区域外，等离子体被电流片中心薄层过度的压力挤向电流片的两端。Parker研究了这个过程的换算规律，在1957年构造了”磁力线重联和”磁场的合并”名词来描述这个过程，后来在

1963年又提出” 磁场湮灭” 的名词。建立了一种**MHD**模型，其中包括了压缩性，双极扩散和流体不稳定性等增强重联的效应，来对横跨电流片的内部结构进行了描述。但当其应用于太阳耀斑时，发现磁场能量转换成动能和热能的速率很低（至少比一般耀斑过程的低 3、4 个数量级）。所以人们后来将注意力集中在构造快速磁场重联模型上。

在快速磁场重联理论模型中，要么强调电阻率充分高，要么强调耗散尺度充分小。强调碰撞的经典电阻率公式在日冕、磁层等空间和天体等离子体物理过程中不太适用。因此，建立反常电阻模型就变得重要起来。在Sweet和Parker模型中，电流片的尺度与耀斑区域尺度相当。而在Petschek (1964) 模型中，电流片的尺度就比Sweet和Parker模型中的的电流片尺度小几个数量级。获得了太阳耀斑所需要的重联率（能量转换率）。因此，**Petschek (1964)** 模型是第一个快速磁场重联理论模型。从此，一系列关于均匀和非均匀的**MHD**磁场重联模型就发展起来了。

历史上对撕裂不稳定性的研究促进了重联理论又一个发展，1963年，Furth在其经典性的论文中指出“当一个简单静态的电流片其长度比宽度大许多倍时，由于撕裂不稳定性产生磁岛出现了自发性重联”。因此，随时间变化的重联模型诞生了。重联模型就分为稳态或准稳态（同一区域其他物理过程比重联时间长）重联，以及瞬变重联等两大类。

有关的磁流体力学近似和无量纲参量

假定特征速度是 V_0 ；特征长度是 L_0 ；流体粘性扩散系数 η 是；磁场扩散系数是 η_m 。那末流体的粘性扩散速度是 $v_D = \eta / L_0$ ，磁场的扩散速度是 $v_d = \eta_m / L_0$ 。 $v_A = (B / \rho \mu_0)^{1/2}$ 为阿尔芬速度， c_s 为声速， κ 为热传导系数。我们可以确定经常使用的无量纲参量是

雷诺数

$$R = V_0 / v_D$$

等离子体（热压 / 磁压比）

$$\beta = 2\mu_0 p / B^2$$

Prandtl数

$$P_r = \eta / \kappa$$

马赫数

$$M = V_0 / c_s$$

磁雷诺数

$$R_m = V_0 / v_d$$

Lundquist数

$$L_A = v_A / v_d$$

磁Prandtl数

$$P_m = \eta / \eta_m$$

磁马赫数

$$M_A = V_0 / v_A$$

经常使用的MHD近似是

稳态	$(\partial/\partial t=0)$
不可压缩近似	$(\rho=\text{常数}, \nabla \cdot \mathbf{v}=0,)$
绝热近似	$(T=\text{常数}, \text{或} \kappa \text{很大})$
理想磁流体近似	$(R_m \gg 1)$
无流体粘性近似	$(R \gg 1)$
等熵近似	$(S=\text{常数})$
无旋场近似	$(\nabla \times \mathbf{v}=0)$
无力场近似	$(\mathbf{j} \times \mathbf{B}=0)$
有势场近似	$(\mathbf{j}=0)$
强磁场近似	$(\beta \ll 1)$
弱磁场近似	$(\beta \gg 1)$
一维流近似	(三向矢量只沿着一个方向发生变化)
二维流共面近似	($\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{v}$ 在同一个平面内变化)

例如，在许多情况下，我们常常先采用不可压缩的近似处理，得到物理结论后，又将理论推广到可压缩的情形去考查。对于不可压缩的有效性范围我们可做以下分析来获得。

在绝热条件下， $p/\rho^\gamma = \text{常数}$ ， $\delta\rho/\rho = \delta p/\gamma p$ ， $\delta p \approx \rho v \delta v$ ，如果在运动方程中压力梯度和惯性项起主要作用（例如， $\beta \gg 1$ ），那么不可压缩条件 $\delta\rho/\rho \ll \delta v/v$ 变成

$$v \ll c_s$$

在另外一种情况系下，如果在运动方程中压力梯度和洛仑兹力平衡（ $\delta p \approx \delta[B^2/2\mu_0]$ ），那么不可压缩条件 $\delta\rho/\rho \ll \delta B/B$ 变成

$$\beta \gg 2/\gamma$$

因此，可以反过来讲，如果遇到快速流和低 β 这两种情况就要考虑到可压缩的效应。

5.2 稳态磁场重联的磁流体模型

磁场重联可以用磁流体动力论（MHD）来描述。假定模型是稳态和两维的。主要目的是使重联能够快速形成以便在空间等离子体中有一种效应。我们发现只有当其使远离扩散区的等离子体调整到一个新的流形时，重联才能产生这样的效应。

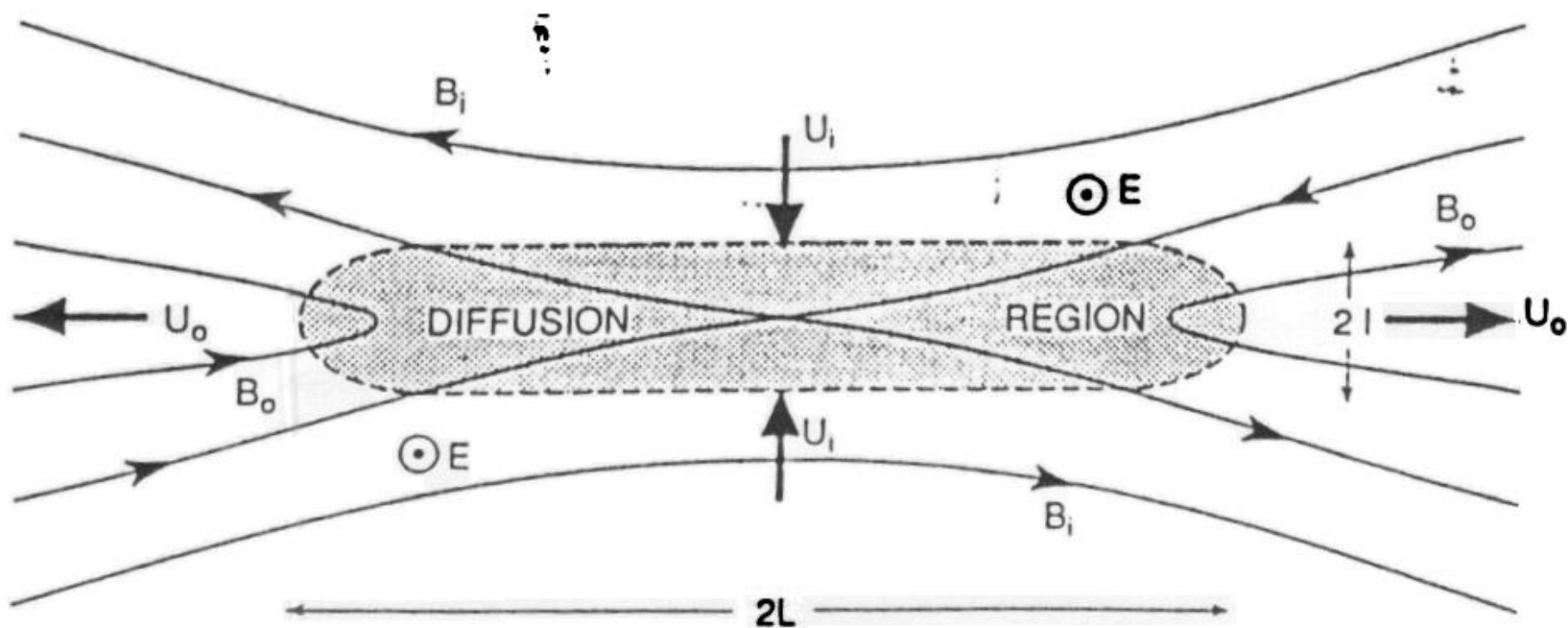


图5.2.1 Sweet-Parker重联几何位形的示意图，其中所有正参与重联的等离子体流过阴影扩散区。造成非常慢的重联过程。

我们从图5.2.1中的所示Sweet-Parker模型开始。这是在图5.1.4中就引进的基本的X线位形。扩散区是阴影的，长 $2L$ 和宽 $2l$ 。其中 $L \gg l$ 。为了简化，我们认为入流和出流区（分别用标记*i*和*o*表示）是对称的。这在磁尾的情形下是合适的，在那里入射流是从南北两瓣进入的。在磁层顶，这两个入射流是不同的。如前，电场*E*是空间均匀的并指向纸外，因此

$$\mathbf{E} = \mathbf{u}_i \mathbf{B}_i = \mathbf{u}_o \mathbf{B}_o \quad [5.2.1]$$

我们进一步假定流是不可压的，那就是说 $\rho_i = \rho_o = \rho$ ，那么，质量守恒给出

$$u_i L = u_o l \quad [5.2.2.]$$

其次我们让流进扩散区的电磁能与出流所携带的动能相等，入射电磁能流每单位面积的流入率是由Poynting通量给出：

$$|S| = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = \mathbf{E} \times \mathbf{B}_i / \mu_0 = u_i B_i^2 / \mu_0 \quad [5.2.3]$$

出流等离子体的动能增益可以代表向外的机械能。每单位面积和时间的流入的质量 ρu_i ,被加速到 u_o , 因此, 每单位面积入流的能量增加率为

,

$$\Delta W = 1/2 \rho u_i (u_o^2 - u_i^2) \quad [5.2.4]$$

把方程 [5.2.3] 与 [5.2.4] 相等, 并考虑方程 [5.2.4] 中 $u_o \gg u_i$, 我们得到

$$u_i B_i^2 / \mu_0 = 1/2 \cdot \rho u_i u_o^2 \quad [5.2.5]$$

因此,

$$u_o^2 = 2 B_i^2 / \mu_0 \rho = 2 v_{Ai}^2 \quad [5.2.6]$$

其中是 v_{Ai} 入流区的阿尔芬速度。根据磁场湮灭计算, 我们估计出在方程 [5.1.9] 中给出的扩散区的厚度 l 。结合方程 [5.2.2] 和方程 [5.2.6], 我们给出了入流速度的表达式,

$$u_i^2 = 2^{1/2} v_{Ai} / \mu_0 \sigma L \quad [5.2.7]$$

因此，

$$u_i = v_{Ai} \left(2^{1/2} / R_{mA} \right)^{1/2} \quad [5.2.8]$$

其中

$$R_{mA} = \mu_0 \sigma v_{Ai} L \quad [5.2.9]$$

这意味着在 R_{mA} 值很大的太阳系等离子体中，对应于流入重联点的流速的重联率是非常，非常低的。利用典型的太阳日冕参数，太阳耀斑要经过几十天才增长起来，而不象观测到的那样是几分钟。这个结果，在五十年代后期分别由Sweet和Parker导出，使得人们倾向于把重联看成是一个不可能的过程。

但是，几年后，Petschek（1964）通过意识到大多数重联过程中的等离子体并不需要流过扩散区来获得加速，而是在MHD有效的区域，称为对流的区域，能够获得加速，解决了重联率的问题。等离子体通过假定在空间是固定的与扩散区相联的激波时，加速便发生了。那就是说，激波固定在流中。这个过程不再要求所有等离子体通过中间平面中长度为 l 内的空间，去掉了瓶颈限制，因此可以获得一个较大的入流率。

扩散区仍然是重要的，因为重联毕竟是发生在那儿的。所以一定要求它的存在，但扩散区会变的越来越小。扩散区的大小并不进入我们的计算中。然而，整个计算基于横越MHD激波的跃变。因此，尽管在这个过程的中心区MHD近似被破坏，重联进行率还是完全基于远离MHD条件被破坏的扩散区的环境，即在对流区， $\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ 成立。

新解的几何位形在图5.2.2中显示出来。现在扩散区被减小到图中心的一点，只有微小部分的流体流过这一点。从这一点释放出的四个激波位于图中的点划线上，对 x 轴的夹角是 ξ 。在这些激波的上游和下游，磁场和流场矢量是均匀的。（几何条件使得整个入流区为均匀区是不可能的，注意磁力线由上下进入图中时为曲线）在激波处，磁场和流场在方向上和在强度上都发生突然的变化，磁场强度降低（在出流区磁力线间隔加大），并且尽管流场速度增加（在出流区流线间隔减小），流场的法线速度则降低。这些是慢模激波，并且它们也是电流片。这些电流片既改变磁场又通过力 $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ 加速流场。也要注意一部分等离子体在通量管已在扩散区重联一段时间后达到激波；这种延迟时间决定于越过激波的等离子体离扩散区有多远。

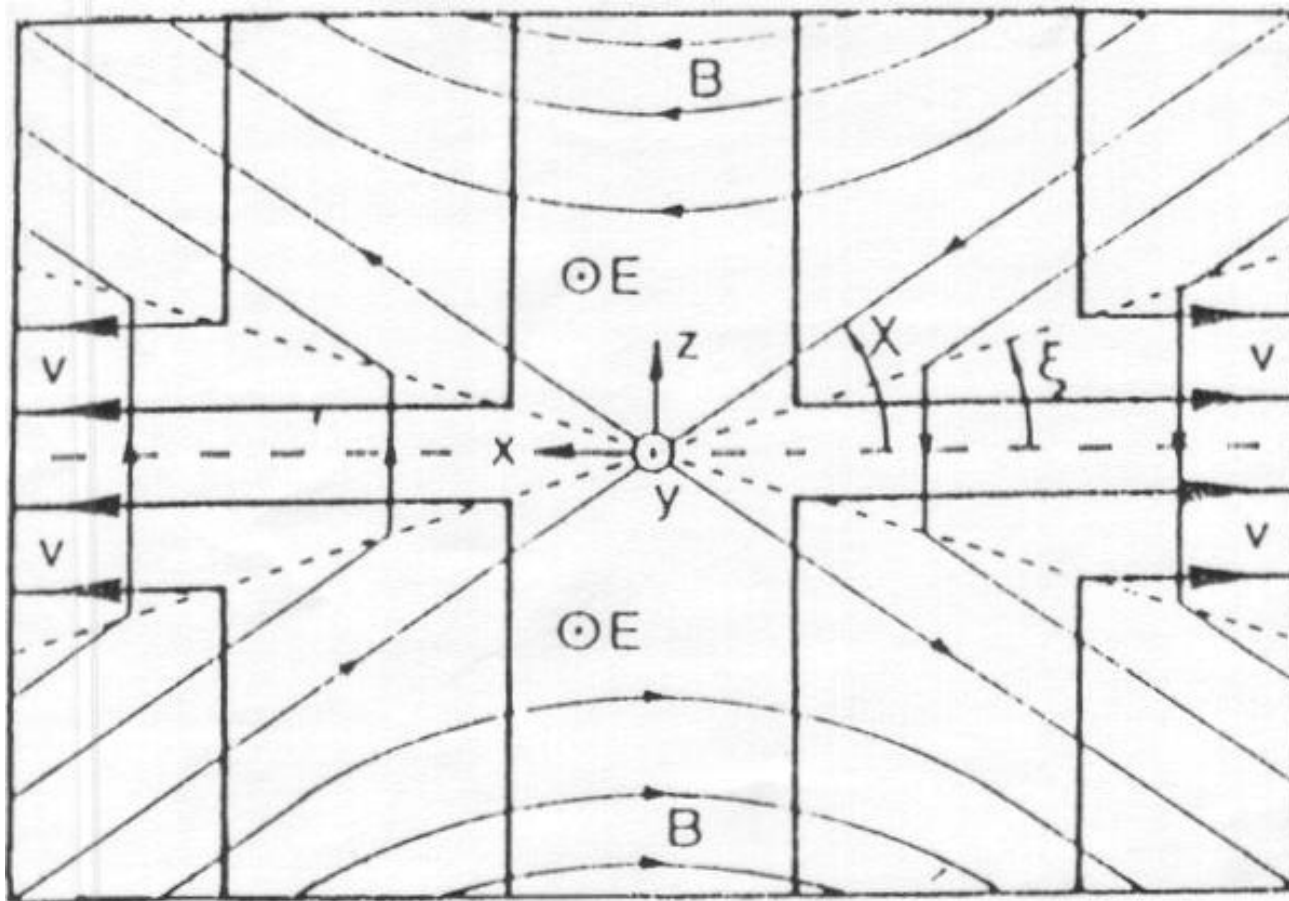


图5.2.2 Petschek重联几何位形，扩散区已缩并到图中央的一点，等离子体在四个相对于 x 轴以倾角为 ξ 的慢模激波中被加速

在上图中的坐标系，激波是固定的，但在等离子体坐标系中，激波沿着磁场以入流的阿尔芬速度 $v_{Ai}=B_i/(\mu_0\rho_i)^{1/2}$ 运动。我们把它与入流速度和激波的角度 ξ ，以及激波上游磁场与x轴的夹角 χ 联系起来。等离子体入流对激波的法向速度必须等于激波对在等离子体坐标中相对于激波面的法向速度，因为激波仍然是固定的。这就给出

$$u_i \cos \xi = v_{Ai} \sin(\chi - \xi) \quad [5.2.10]$$

我们再次注意到稳态并因此要求一个由方程[5.1.5]得出的y方向的均匀电场。所以

$$E_i = u_i B \sin \chi = u_0 B_0 = E_0 \quad [5.2.11]$$

其次， B 对激波的法向分量是守恒的。这给出

$$B_i \sin(\chi - \xi) = B_0 \cos \xi \quad [5.2.12]$$

从[5.2.11]和[5.2.12]中消去磁场并利用[5.2.10]而得到

$$u_o = u_i \cos \xi \cos \chi / \sin(\chi - \xi) = v_{Ai} \cos \xi \quad [5.2.13]$$

因此，作为Sweet-Parker解，出流速度与入流阿尔芬速度是可以比较的。根据过激波的质量流是守恒这一点，我们得到

$$\rho_i u_i \cos \xi = \rho_o u_o \sin \xi \quad [5.2.14]$$

这里我们允许等离子体在激波处可以被压缩（即 $\rho_o \geq \rho_i$ ），在[5.2.13]和[5.2.14]中消除 u_i 和 u_o ，重新组合，我们获得

$$\tan \xi = \tan \chi / (1 + \rho_i / \rho_o) \quad [5.2.15]$$

进一步组合方程[5.2.13]、[5.2.14]和[5.2.15]，我们获得一个入流速度的表达式

$$u_i = v_{Ai} \sin \chi / (1 + \rho_i / \rho_o) \quad [5.2.16]$$

现在，因为慢模激波只能够压缩等离子体， $0 < \rho_i / \rho_0 < 1$ ，所以，

$$1/2 < u_i / (v_{Ai} \sin \chi) < 1 \quad [5.2.17]$$

这样一来，完全与Sweet-Parker解相反，入流速度与入流阿尔芬速度的比较为合理，但是，进一步对此解的限制条件进行分析表明， $u_i \leq 0.1 v_{Ai}$ 。

物理上等离子体加速发生在激波波面并可以看成是 $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ 造成的。激波的指向可以调整以确保入流速度；出流速度也在调整但仍近于 v_{Ai} ，这解允许重联率加大以便重联在理论上可以作为一种有效的过程。

进一步的精细研究由**Sonnerup (1970)**所完成，其引入另一组激波，克服了**Petschek**解中的入流速度的限制。这组激波是快模激波，它们可以在入流区中既压缩磁场又压缩等离子体，并开始改变流的方向，这种改变在慢模激波中完成，流体速度大大增加。在**Sonnerup**解中，快模激波位置有效地由边界条件所决定。在一定条件下，膨胀并不作为不连续激波而出现，但却在整个入流区中逐渐产生。由边界条件所决定的快模激波的作用给我们带来的可能是比较重要的内容。一旦我们确立重联能够发生，它是如何发生的多数是由外部条件所确定而不是由重联发生点的条件所决定。因为一开始就把重联作为微观问题来处理，所以现在我们发现需要考虑的是整个系统的宏观性和普遍性的问题。

这一点由**Priest**和**Forbes**（1986，1987）很精美地表述过，它们发现对于稳态重联有一个普遍的解，**Petschek**解和**Sonnerup**解只是包括在其中的特殊解。他们表明**Petschek**和**Sonnerup**实际上在入流区利用了特殊的边界条件。当边界条件普适化以后，调整边界电流的形式，使入流区的流动从聚合流改为发散流。对于某一个较小的参数，我们发现存在一个最大的重联率，但对较大的参数值，重联能够任意快的形成（在它们模型的有效范围内）。**Forbes**和**Priest**也发现边界条件的不同可以解释以前为什么重联的解析结果和数值计算结果会有如此大的不同。

各个研究者在不同的条件下首先研究了经典的稳态重联模型，Parker（1957），Sweet（1958），Dungey（1961），Petschek（1964），Sonnerup（1970），Yeh and Axford（1970）等分别提出了它们自己的稳态重联模型。Sonnerup解决了高电导率不可压磁流体中对称磁场重联问题。Cowley在不同强度的反平行磁场中扩展了Sonnerup解，他指出在扩散区中平行于对称平面的磁场和流场属于最低阶量。Priest（1992）完成了流场和磁力线的非双曲线性质的研究。Baum（1977）表明了在一定条件下重联的实验证据。Hameiri（1979）给出了非共面过程的压缩重联解。Ugai（1977，1979，1981）和Tsuda（1977）仔细研究了局部电阻率增强条件下磁场重联过程及在剪切磁场情况下的Petschek模型。Forbes（1988，1989）和Priest（1989，1992）研究了稳态三维脉冲驱动重联以及它们在太阳耀斑中的应用。快速重联在天体物理和空间等离子体中是一种普遍过程得到了确认。

平面稳态非对称重联的数学分析由Semenov (1983) 。Soward (1986) 得到了一个能解释Y点重联和作为逃逸急流的流体特性的解析解。Phan和Sonnerup (1990, 1991) 讨论了确定流场和磁场位形的粘性作用并贡献出在区分两类碰撞等离子体的电流片中二维稳态不可压流体的精确解。他们也研究了带有平衡粘性驻点流的电流片中电阻撕裂模不稳定性。Priest和Lee (1990) 研究了对于带有分离面急流非线性重联模型并发现入流边界条件决定分离面的位置和附在中心电流片边缘的激波。Ugai (1992, 1995) 借助计算机研究描述了不同电阻模型的快速重联机制的演化和自发快速重联机制中强的磁能转换。这些研究都属于稳态重联的研究。

5.3 非稳态磁场重联的磁流体模型

当一定区域发生的磁场重联过程是随着时间而变化时,这种类型的磁场重联就叫做非稳态磁场重联或瞬变磁场重联。这种类型的提出是来源于对撕裂模不稳定性的研究。

从上章关于撕裂模不稳定性的学习中知道,当扰动波长大于电流片厚度时会产生撕裂模不稳定性,将电流片撕裂成一连串岛状的磁场形变位形,这些位形称之为磁岛。从图5.3.1看出,磁岛中心区形如字母O(磁场最大),称之为O点;磁岛最边缘区与另一磁岛最边缘区相接,形如字母X(磁场最小),也就是磁场位形的X点。

这些磁岛最初并没有出现,他们是随着不稳定性的发展而产生出来的,而且随时间发生演变,产生磁岛的分裂和与合并。因此在整个电流片区,重联点的位置也会发生变化,重联过程中固定点的各物理参量也在随时间演变。

非稳态磁场重联或瞬变磁场重联与实际的空间物理现象更相符合。

Unsteady Reconnection: The Tearing Mode

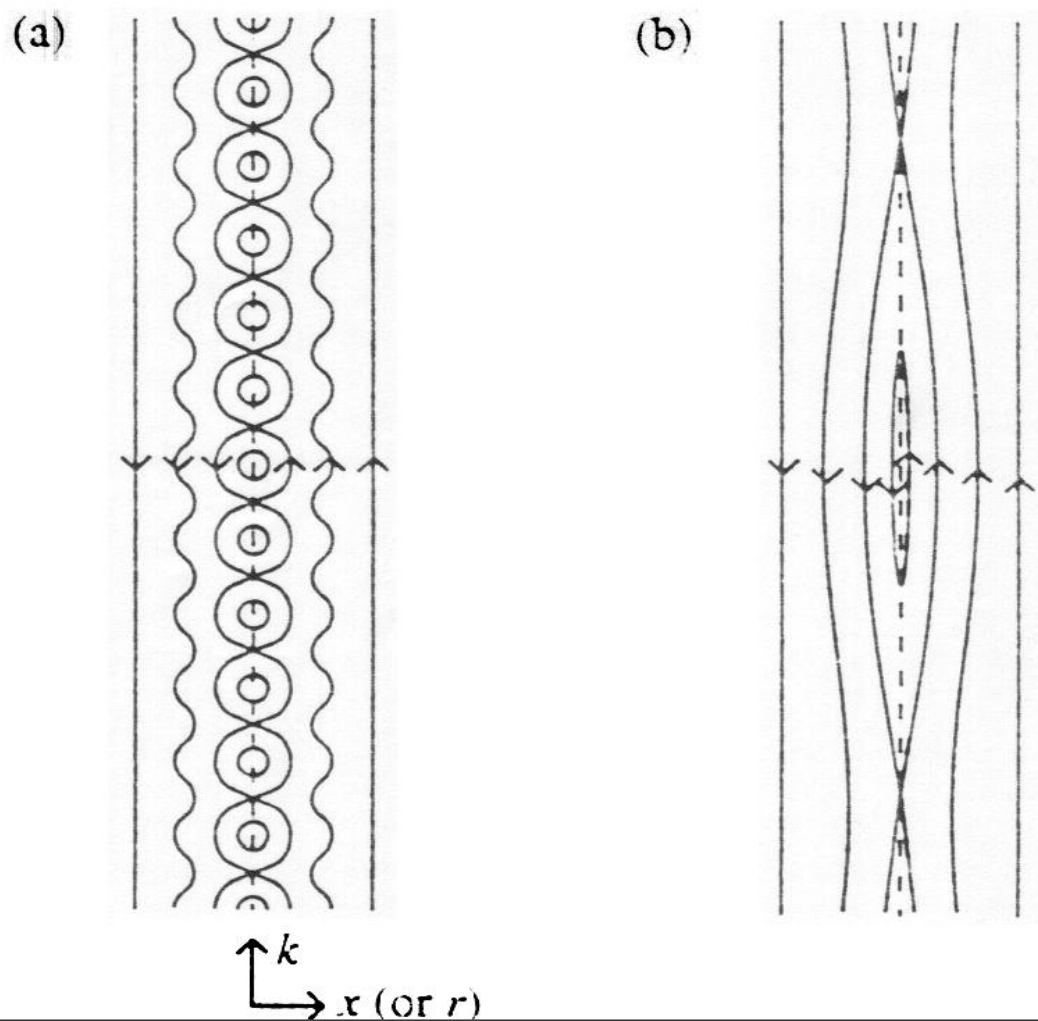


图5.3.1

在考虑无粘性不可压且电阻率为均匀的条件下，磁流体模型的出发方程如下：

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad [5.3.1]$$

$$\mu_0 \rho d(\nabla \times \mathbf{u}) / dt = \nabla \times [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \quad [5.3.2]$$

其中利用了

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad [5.3.3]$$

初始条件为磁场方向在yz平面但沿x轴而旋转

$$\mathbf{B}_0 = B_{0y}(x)\mathbf{y} + B_{0z}(x)\mathbf{z} \quad [5.3.4]$$

假定在平衡背景上的初始扰动流场和磁场的解采用如下形式：

$$\mathbf{u}_1(x) \exp [i(k_y y + k_z z) + \omega t], \quad \mathbf{B}_1(x) \exp [i(k_y y + k_z z) + \omega t] \quad [5.3.5]$$

从图5.3.2看出，磁岛互相靠近并合并成一个大的磁岛，同一时间段，流场从小而多涡旋结构变成了大而少涡旋结构，这个过程发生了称之为合并不稳定性的扰动增长。其实从电磁学就知道，两个同向电流的会互相吸引，。

实际上，在给定介质的尺度条件下，撕裂模不稳定性在最长波段时最强。在许多情况下，扰动并不是在最长波段。因此当扰动增长后趋于饱和时，不再发生合并。但是，如果外部扰动或额外的物理效应对于这些稍短波段的扰动引起它们增长以致在磁岛中产生电流密度的峰值，也会发生合并。

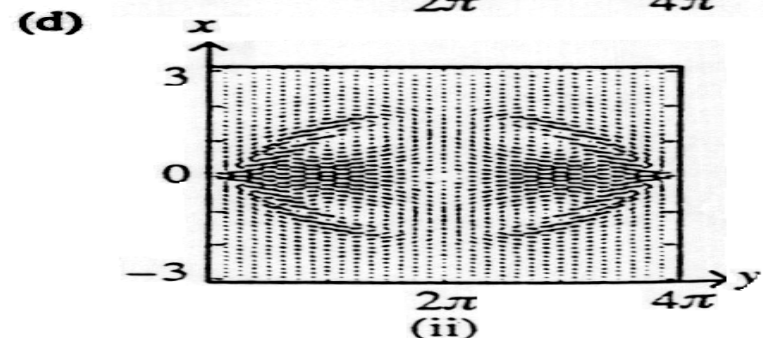
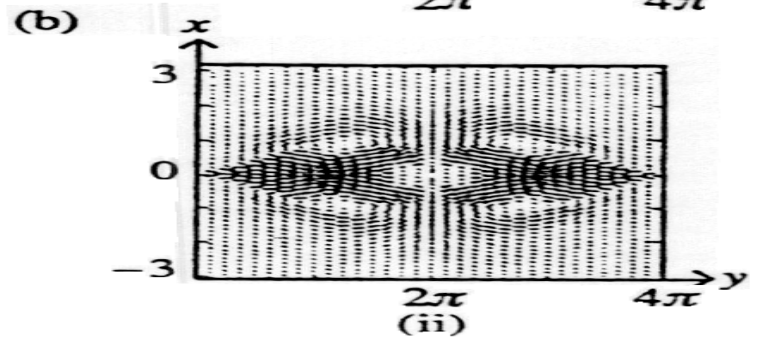
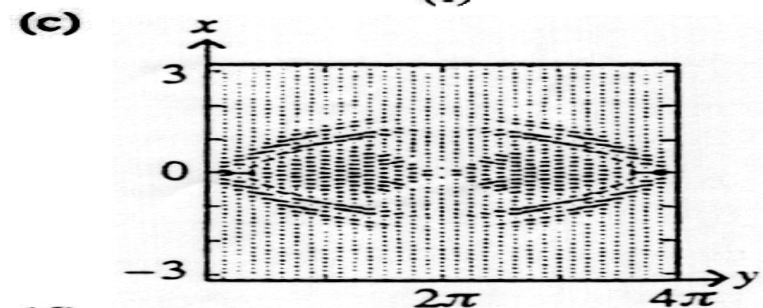
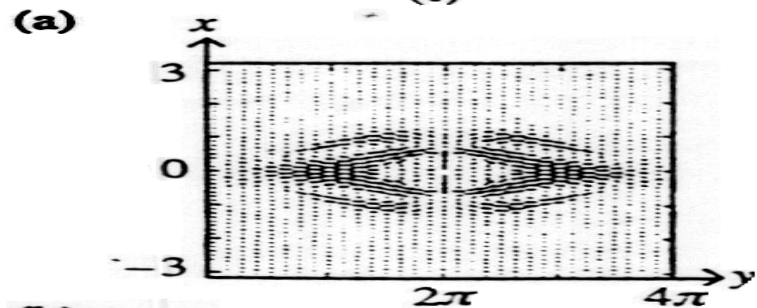
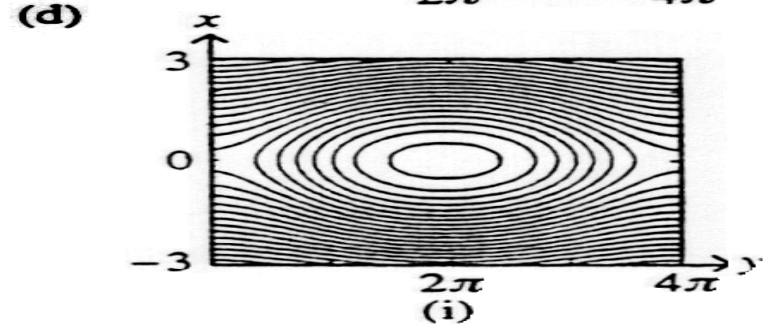
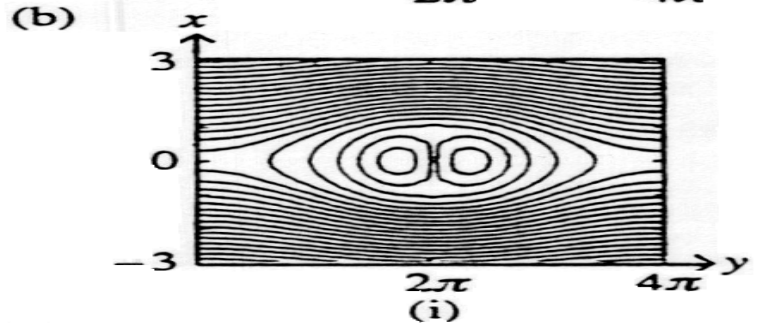
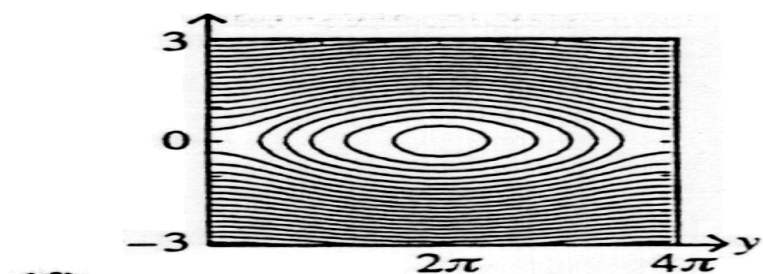
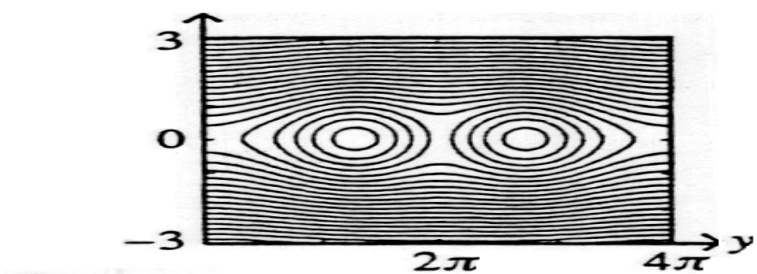


图 5.3.2

许多研究者研究了瞬态重联模型。

Deed 和Hoven (1977) 早在**1977**年就提出小尺度重联的湍动激发概念。

李罗权 (1985, 1986) and 付竹风Fu (1985, 1986) 提出了多X线重联理论。

Scholer (1988) and Southwood (1988) 提出了磁层顶暴发单X线重联模型 (**BSXR**);

刘振兴和胡一丁 (1988, 1990, 1992) 发展了涡旋诱发重联理论(**VIR**)。

Pu (1990) 计算了阿尔芬马赫数对涡旋诱发撕裂模不稳定性线性演化和非线性演化的影响。

Sato (1991) 的研究结论是：不论是由理想不稳定性或外力作用,等离子体流总是使磁场位形改变并且经常产生电流的局部增强,快速驱动重联由此而产生。

Ma (1991) 研究了脉冲等离子团穿入过程。发现需要很大能量才能将粒子穿透磁场交界面并在原同向磁场区产生局部瞬变重联。

Robert (1993) 研究了湍流对撕裂模不稳定性引发的磁场重联率的影响。

Otto (1995) 研究了压力脉冲条件下重联过程中磁场和等离子体的细节。**Chen (1997)** 研究讨论了撕裂模不稳定性，**Kelvin-Helmholtz** 不稳定性和磁场重联问题。

Ottaviani (1995) 研究了快速非线性重联中,磁流体力学系统在早期的非线性演化中展示了准暴发时间过程，其中流体移动比惯性趋附尺度大，而比对流元的典型尺度小。

Ma, Wang 和 Bhattacharjee (1996) 提出了一种受迫重联模型并描述由于正弦扰动边界条件下静态和旋转等离子体中电流片的演化。

有关非稳态磁场重联模型参量变化

如果在Sweet-parker和Petschek磁场重联模型中，令电流片的长度随时间变化，即 $L=L(t)$ ，因此磁雷诺数也随时间发生变化，进而使得重联率也发生变化。在非稳态磁场重联情况对应的电流片的厚度也随时间变化。

在对应于Sweet-parker和Petschek磁场重联模型的MHD数值模拟研究中，使用开边界条件（物理量的法向导数为零），一些研究者（Ugan, Scholer）使磁扩散系数在电流片的某个位置随时间增强或突然增强，也发现了磁场重联被激发。

利用数值模拟还可发现了一些解析分析没有得到的重联过程中的特性，如认识到非稳态Petschek磁场重联模型中的激波上游入流的偏转，导致研究者（Heyn, Semenov）用不可压条件去重新审定非稳态Petschek磁场重联模型，由于出流尺度的连续增加的原因。结果确定上述偏转出自为出流快模激波引起的偏转层。

5.4 瞬时磁场重联理论在近地空间中的应用-模型举例

5.4.1.地球磁层中多重X线磁场重联模型

此模型利用二维（ x, z ）数值模拟，出发方程是不可压缩单流体方程组，采用的初始条件是

[5.4.1]

$$\vec{B} = B_0 \tanh\left(\frac{x}{d}\right) \vec{e}_z + B_{0y} \vec{e}_y$$

其中 d 是常数，是电流层的特征厚度，箭头符号表示矢量方向。在 X 方向模拟长度是 $L_x = a$ ，在 Z 方向模拟长度是 L_z 。将单流体方程组写成无量纲形式。磁场，长度，速度，时间，电流，电阻和粘性分别用单位 B_0 ， a ， V_A ， $t_A = a/V_A$ ， $B_0/(\mu_0 a)$ ， $\mu_0 a V_A$ 和 $\rho_0 a V_A$ 表示，这里 V_A 是阿尔芬波速， t_A 是阿尔芬波通过时间， μ_0 是自由空间的磁导率， ρ_0 是不变的的等离子体密度。

采用的边界条件是

在 $X=a$ 边界，磁场保持由方程给出的初值。垂直速度的取为 $V_1=R_0V_A$ ，这里参量 R_0 可以认为是给定的重联率。

在 $X=0$ 边界，采用对称的边界条件。

在 Z 方向边界，采用对称的边界条件。

见以下几图，模拟区越长，重联 X 点越多。

在向阳面应用的示意图。

在磁尾应用的模拟图。

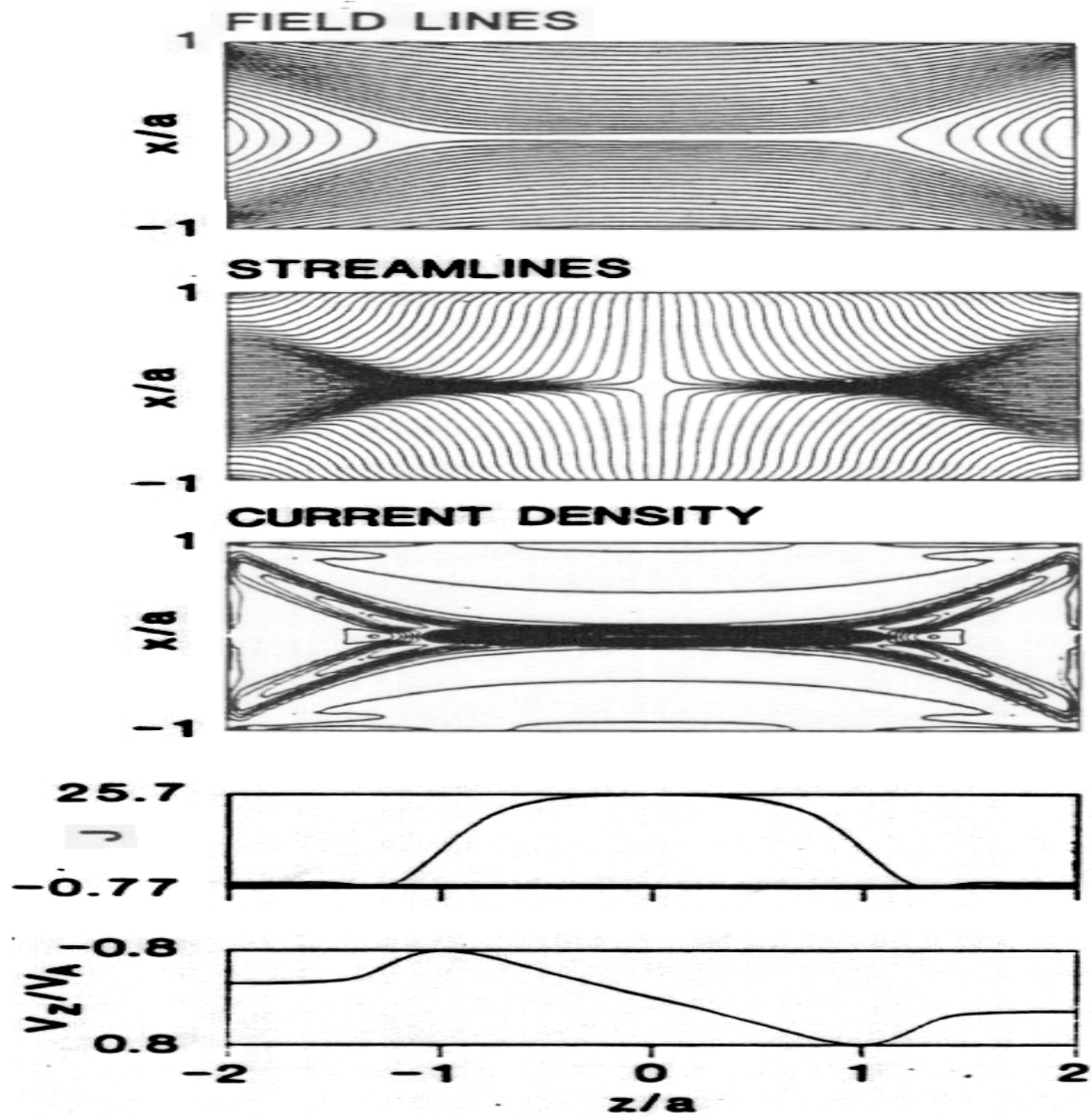


图5.4.1

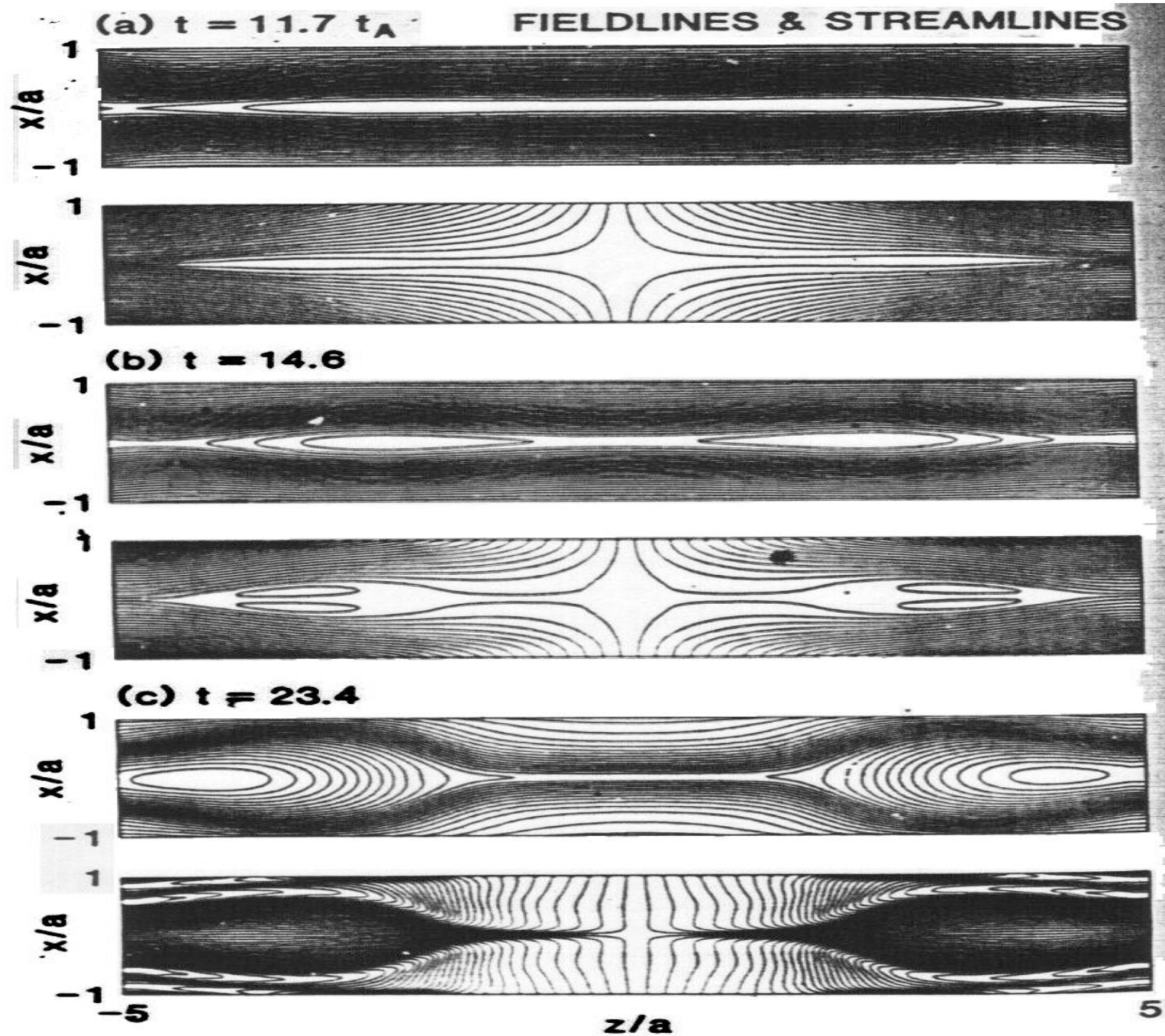
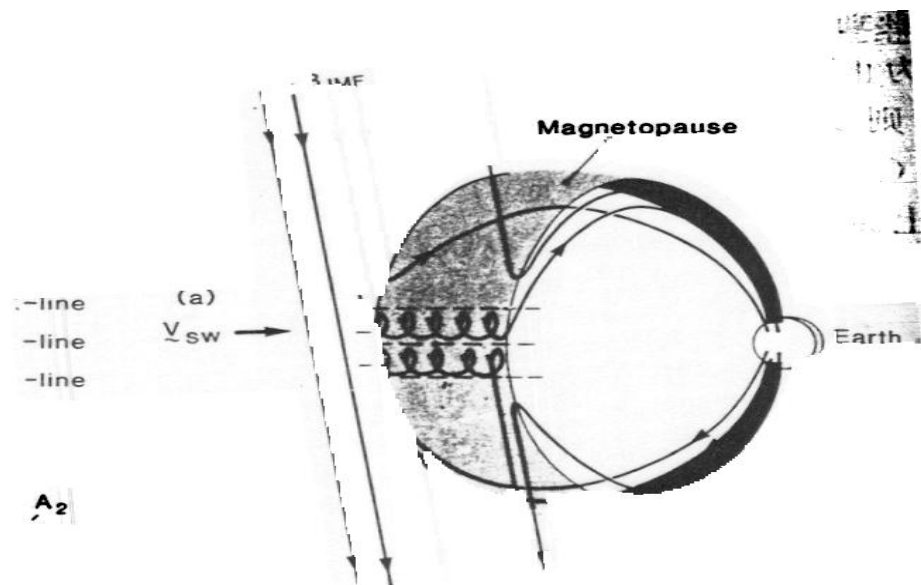


图5.4.2



A₂

ne

1e

e

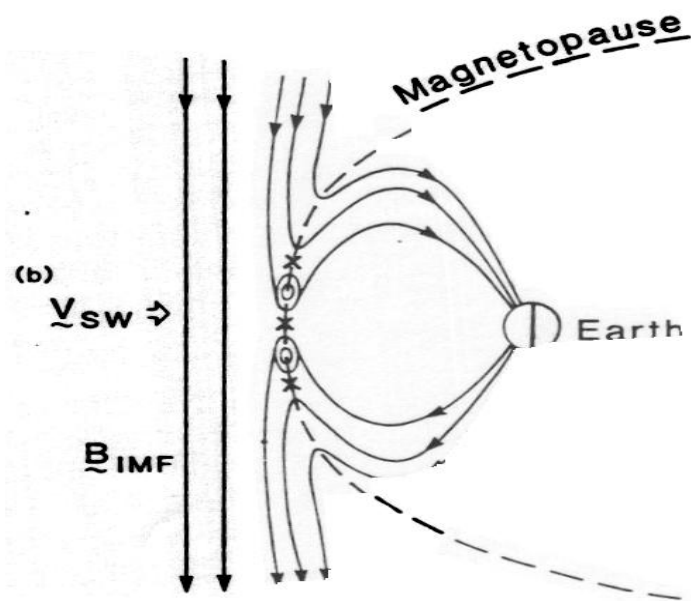


图5.4.3

CASE (A) FIELDLINES

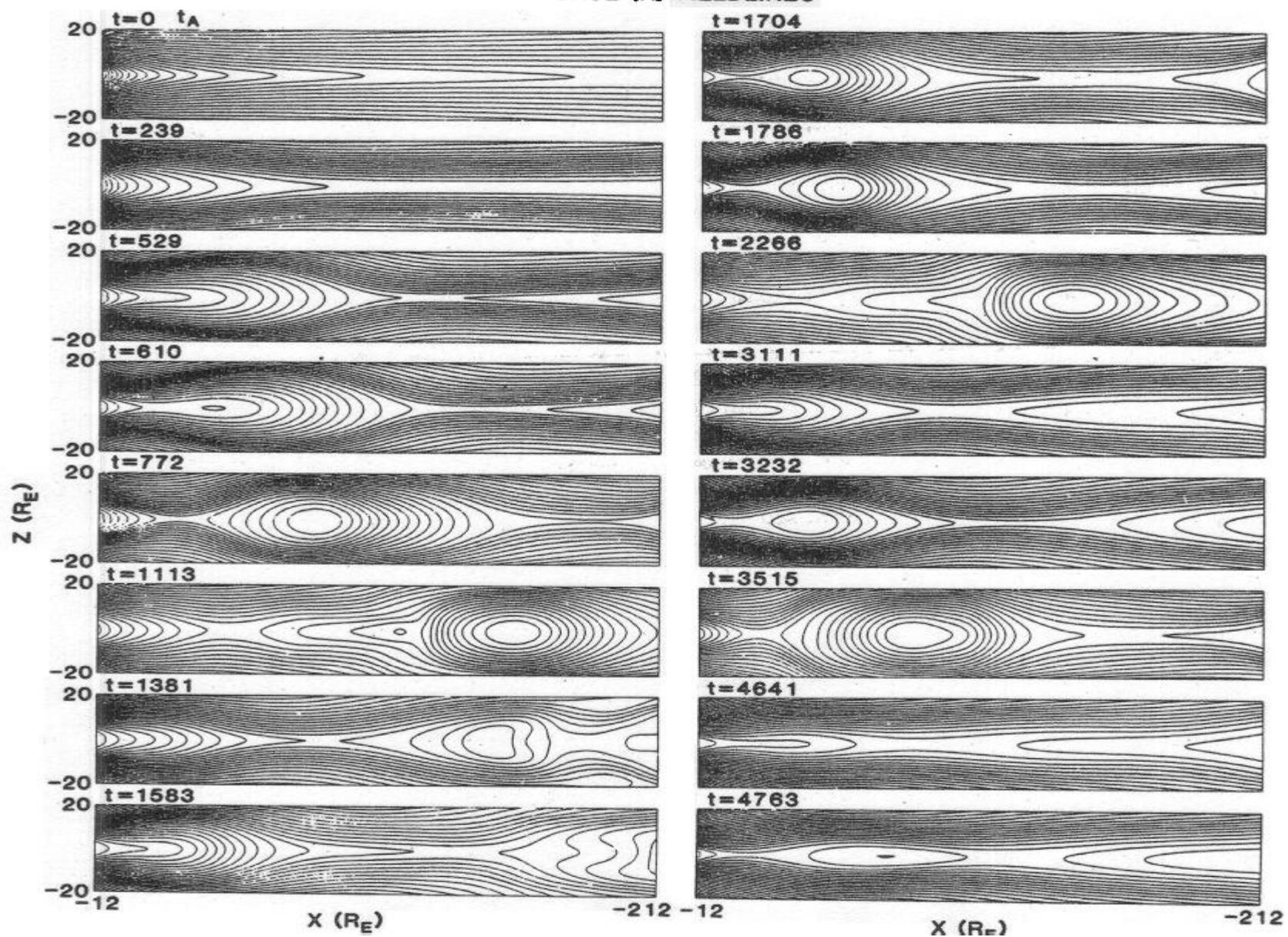


图5.4.4

5.4.2.地球磁层中涡旋诱发磁场重联模型

此模型利用二维（ x, z ）数值模拟，出发方程是不可压缩单流体方程组，采用的初始条件是

$$\left. \begin{aligned} B(x,0) &= \left[\frac{B_{01} + B_{02}}{2} + \frac{B_{01} - B_{02}}{2} \tanh\left(\frac{x}{L_B}\right) \right] e_z \\ V(x,0) &= \left[\frac{V_{01} + V_{02}}{2} + \frac{V_{01} - V_{02}}{2} \tanh\left(\frac{x}{L_V}\right) \right] e_z \end{aligned} \right\} [5.4.2]$$

在 x 方向边界，采用对称的固定边界条件。

在 z 方向边界，采用周期的边界条件。

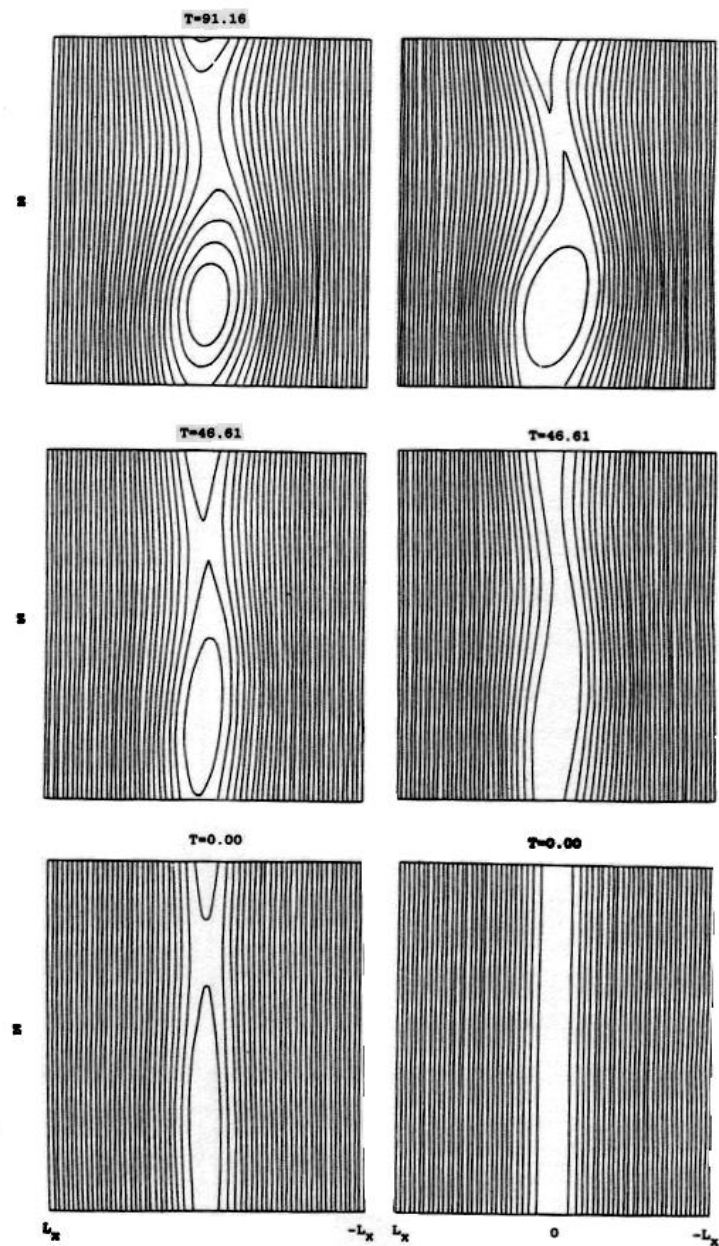


图5.4.5

5.4.3.地球向阳面磁层顶横向剪切流驱动磁场重联模型

前面并对各类稳态重联模型和瞬态重联模型做了一一介绍。从而知道每个磁场重联模型的特点是不一样的。我们将要展示的是单边剪切流对电流片区的横向冲击及停止后磁场重联产生的类型和结构特性。这是对一个扰动事件的完整描述。其不仅研究了外部扰动作用时电流片区磁场重联的产生过程，而且还研究了外部扰动停止后，磁场重联的再次发生过程，以及在这些过程中各热力学参量的时空变化。得到了新的重联位形。这种新的重联模型与其他重联模型的区别在于单边剪切流扰动和突然停止。

数值模拟是一种用于描述物理过程的模型，它由一定的基本物理定律出发，用离散化变量描述物理体系的状态。这些变量在计算机中，根据基本物理定律制约的简单关系，从而模拟物理过程的发展演变，MHD模拟，是从磁流体力学方程组出发，磁流体力学模拟大体上可以看成是偏微分方程的数值求解问题。偏微分方程组的数值求解有多种方法，较常见的大体为有限差分法，有限元法，谱方法等。谱方法是把各量按富里叶级数展开求各项系数再求和而得到所求物理量。有限元法是解决不规则几何形体的有效方法，最常见的还是有限差分法，磁流体模拟方法适用于这样一些物理问题，即运动的时间尺度大于离子回旋周期，空间尺度大于离子回旋半径，在这种尺度上来看，离子和电子的个性都不重要了，表现出的是粒子运动的平均形态。等离子体可以被看成是连续流体。空间等离子体物理问题中，等离子体碰撞周期甚至大于宏观运动尺度，例如，太阳风向地球的运动。这是大尺度时间的宏观问题，其与地磁场的相互作用，以及重联问题，磁层亚暴，K-H不稳定性等都可**MHD**模拟来进行。

MHD数值模拟模型

用二维可压缩**MHD**方法模拟研究非均匀动压（横向剪切流）从一边冲击等离子体边界层期间和冲击停止后边界层区的瞬时磁场重联过程及磁场和等离子体的结构特性。模拟区取为**XZ**平面等离子体边界层区，包括反**Z**向均匀磁场区（Ⅰ区），电流片区（Ⅱ区）和**Z**向均匀磁场区（Ⅲ区）。

基本方程组：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\rho(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} - \frac{\beta}{2} \nabla(\rho T R) + (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} + \nu \nabla^2 \vec{V} + \frac{\nu}{3} \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) \quad (2)$$

$$\rho \frac{dT}{dt} = (\gamma - 1) [-\rho T \nabla \cdot \vec{V} + \frac{2\eta}{\beta} (\nabla \times \vec{B})^2 - \frac{4}{3} \frac{\nu}{\beta} (\nabla \cdot \vec{V})^2 + 4 \frac{\nu}{\beta} (\vec{S} \cdot \nabla) \cdot \vec{V}] \quad (3)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (4)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6)$$

以上各方程中 ρ , T , V , B 分别为等离子体的密度, 温度, 速度和磁场强度, $\bar{S}$ 为流体粘滞张量, γ 为热容比, $\gamma=5/3$, β 为电流片以外的等离子体热压和磁压比, ν 和 η 分别为流体粘性和磁流体粘性系数。温度, 密度, 速度, 磁场, 长度和时间的规一化单位分别取为 T_0 、 ρ_0 、 V_0 、 B_0 、 L_0 和 $t_0=L_0/V_0$ 。

初始条件和边界条件

模拟区取为在 (X, Z) 平面 $-L_x/2 < x < L_x/2$, 和 $-L_z/2 < z < L_z/2$ 的长方形, 速度和温度的初始条件取为 $V_x(x, z)=0$, $V_z(x, z)=0$, $B_x(x, z)=0$, $T(x, z)=1$ (均匀) 及

$$B_z(x, z) = \frac{B_{02} + B_{01}}{2} + \frac{B_{02} - B_{01} \tanh(\frac{x}{D_B})}{2} \quad [7]$$

式中 $B_{02}=1.2$, $B_{01}=-0.6$ 分别表示I区和III区的磁场强度, D_B 表示磁场剪切层厚度。

根据压力平衡和 $T=T_0$ 的条件，密度的初始条件可写为：

$$\rho(x, z) = \rho_0 + \frac{B_0^2 - B_x^2(x, z)}{2\mu_0 RT} \quad (8)$$

在 $x=+L_x/2$ 和 $x=-L_x/2$ 的边界上取固定边界条件，由初始条件确定。在 $z=L_z/2$ 和 $z=-L_z/2$ ，取周期边界条件。当非均匀的边界动压冲击边界层时，作用在左边界（ $x=L_x/2$ ）的横向剪切流速度假定为

$$V_x\left(\frac{L_x}{2}, z\right) = V_{x0} + V_{x1} \operatorname{sech}\left(\frac{z}{D_v}\right) \quad (9)$$

式中 V_{x0} 为背景流速， V_{x1} 为净剪切流速， D_v 表示速度剪切层厚度。在模拟中， x 和 z 方向各取128个格点，令 $\Delta x=0.125$ 和 $\Delta z=0.025$ 空间微分以中心差分代替，时间推进由四阶Runge-Kutta方法计算。

模拟结果

在数值模拟中，取 $T_0=3.27\times 10^6\text{ K}$ ， $l_0=1500\text{ km}$ ， $\rho_0=3.24\times 10^{-26}\text{ kg/cm}^3$ ， $B_0=20\text{ nT}$ ， $V_0=232.49\text{ km/s}$ ， $\eta=0.0004$ ， $D_B=1162.5\text{ km}$ ， $D_v=600\text{ km}$ ， $\eta_m=0.008$ ， $\gamma=5/3$ 。 $V_A=97.62\text{ km/s}$ ，阿尔芬时间 $t_A=l_0/V_A$ 。

1. 均匀横向流情况

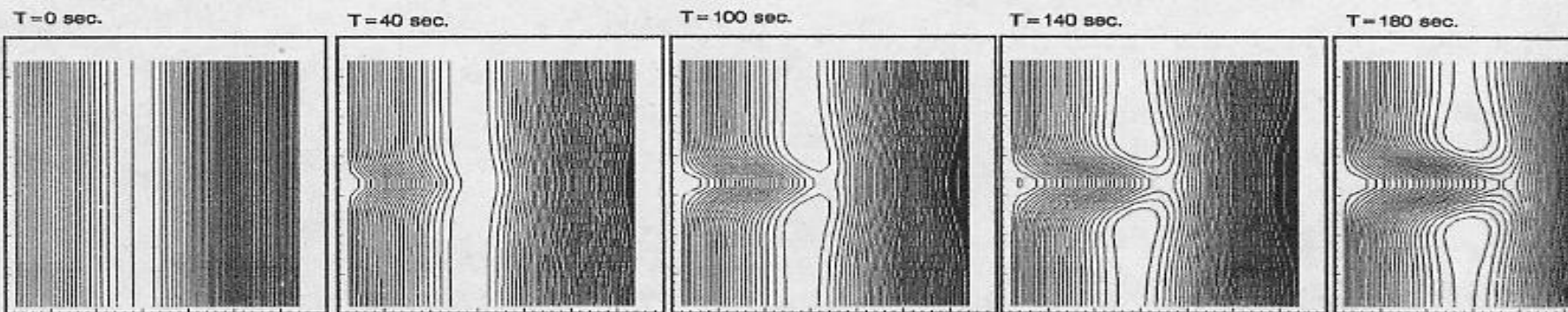
在这种情况下，取 $V_{x0}=0.1V_0$ 和 $V_{x1}=0$ ，

2. 横向剪切流冲击引起的磁场重联

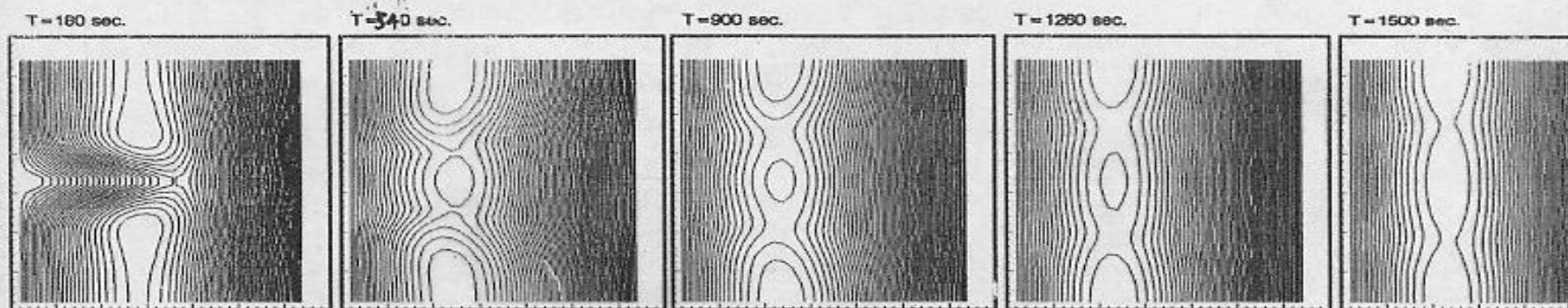
在这种情况下，在模拟中取 $V_{x0}=0.01V_0$ 和 $V_{x1}=0.1V_0$ ，

这些数值结果分为两类。一类是**均匀横向流**情况，另一类是**横向剪切流**情况。对均匀横向流数值结果分析得主要结论是，电流片在外部均匀流冲击时被推向下游，外部均匀流停止后又回移，随后伴有振荡，横向均匀流并不引起局部重联。均匀流冲击时密度、温度、电流密度均上升，热能、动能和总能也上升。磁能下降。均匀流停止后密度、温度、电流密度均下降。热能、动能和总能也下降。磁能上升。在横向剪切流冲击情况下，会发生瞬时的，局部的重联。这种重联的典型特征是“反K”型准稳态结构，在剪切流冲击时，密度、温度、电流密度均升高。无论是均匀流还是剪切流。在扰动初期都有波动的激发。

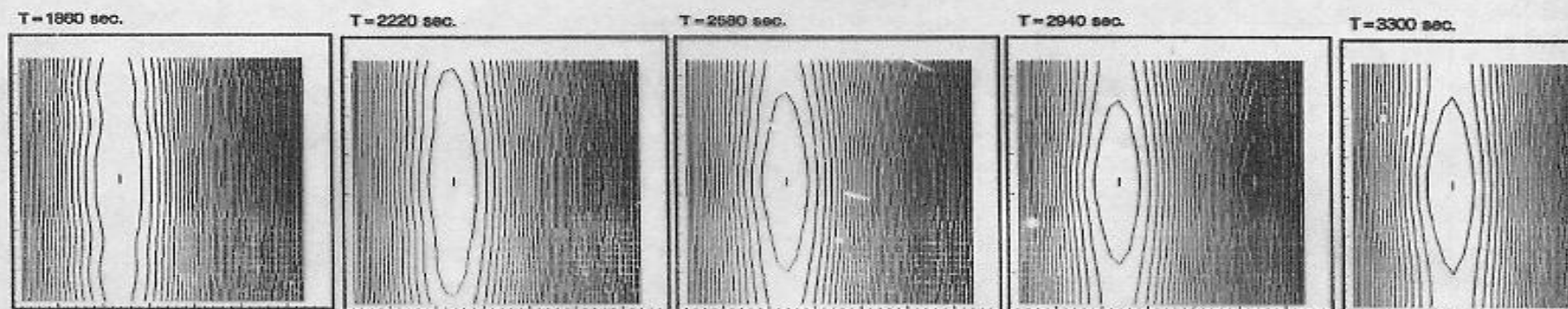
(1) Impacting process, resistivity inceasing.



(2) rehabilitation, resistivity decreasing.



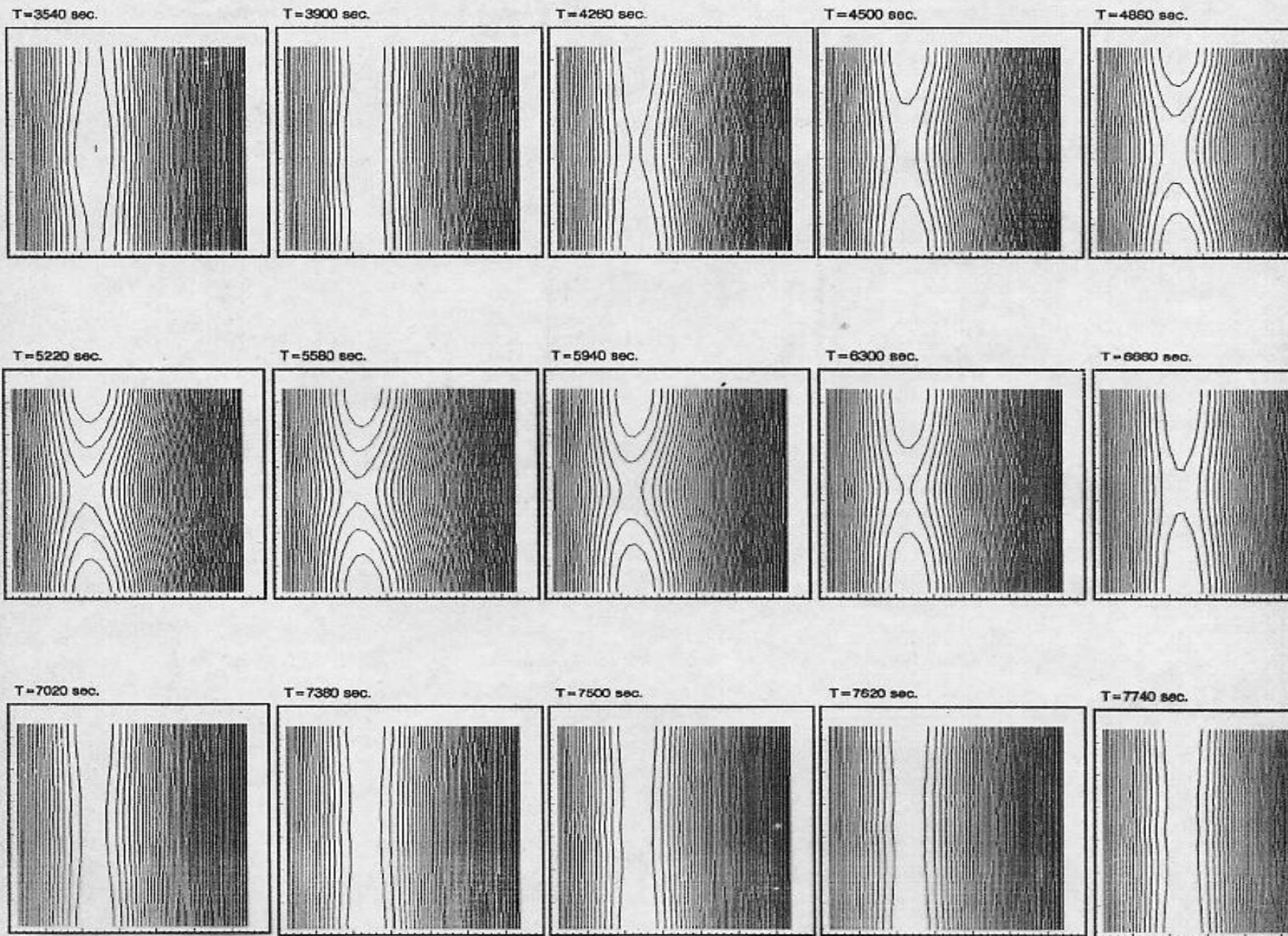
(3) rehabilitation, constant resistivity.



X Direction

图5.4.6

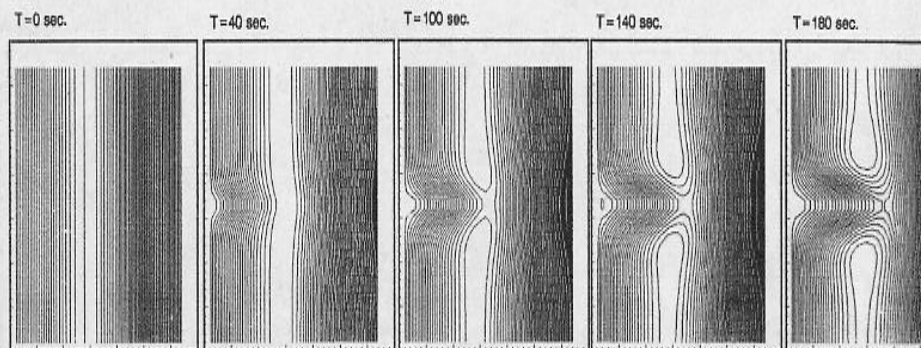
Z Direction



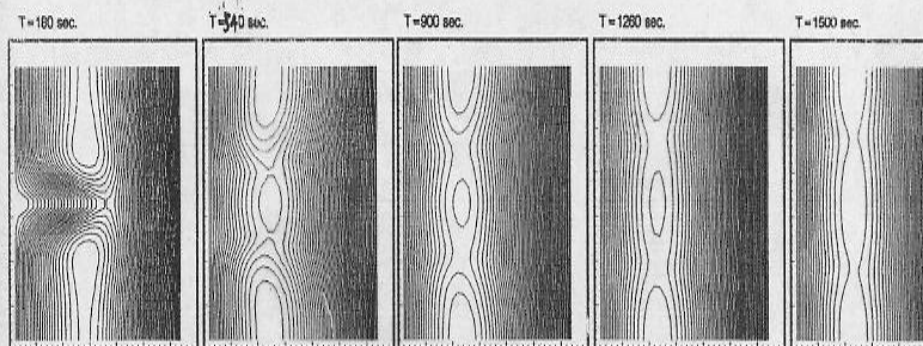
X Direction

图5.4.7

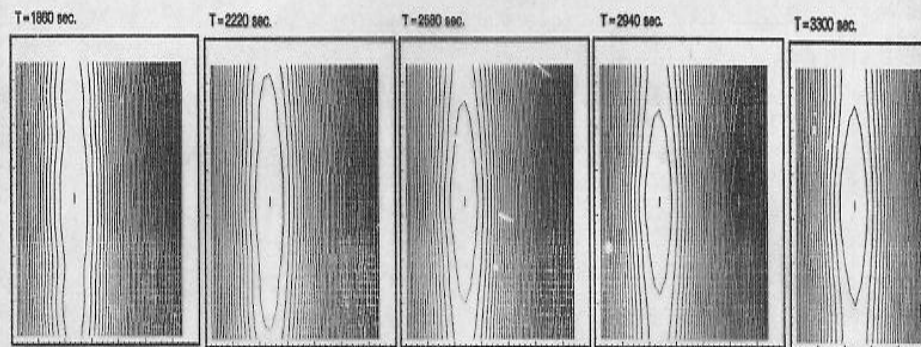
(1) Impacting process, resistivity inceasing.



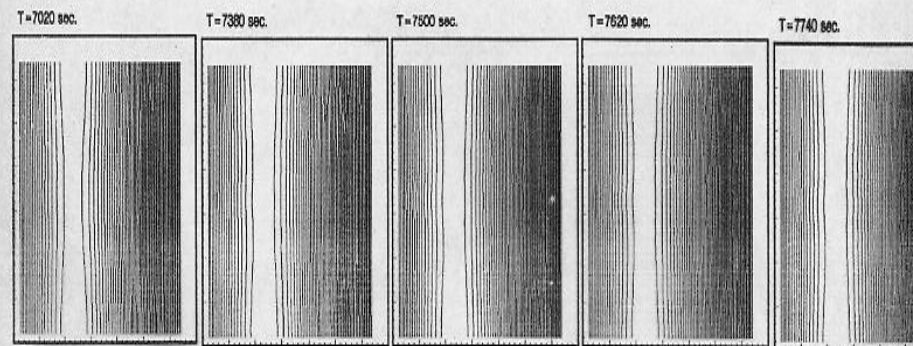
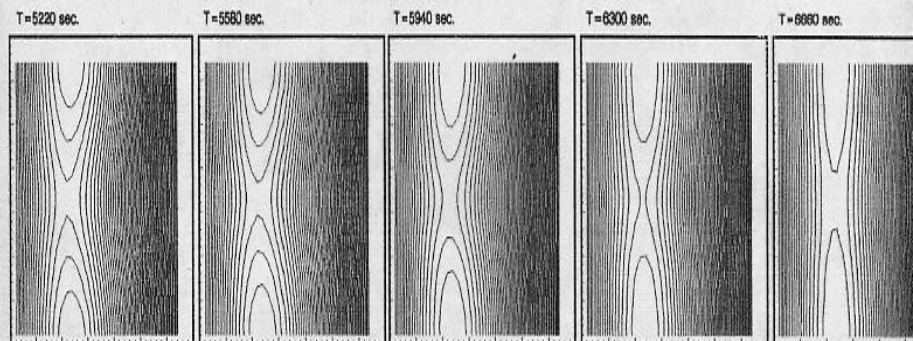
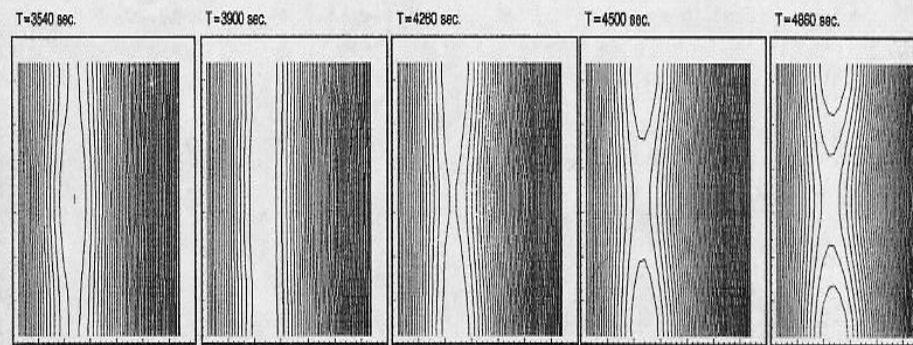
(2) rehabilitation, resistivity decreasing.



(3) rehabilitation, constant resistivity.



Z Direction



X Direction

图5.4.8

X Direction

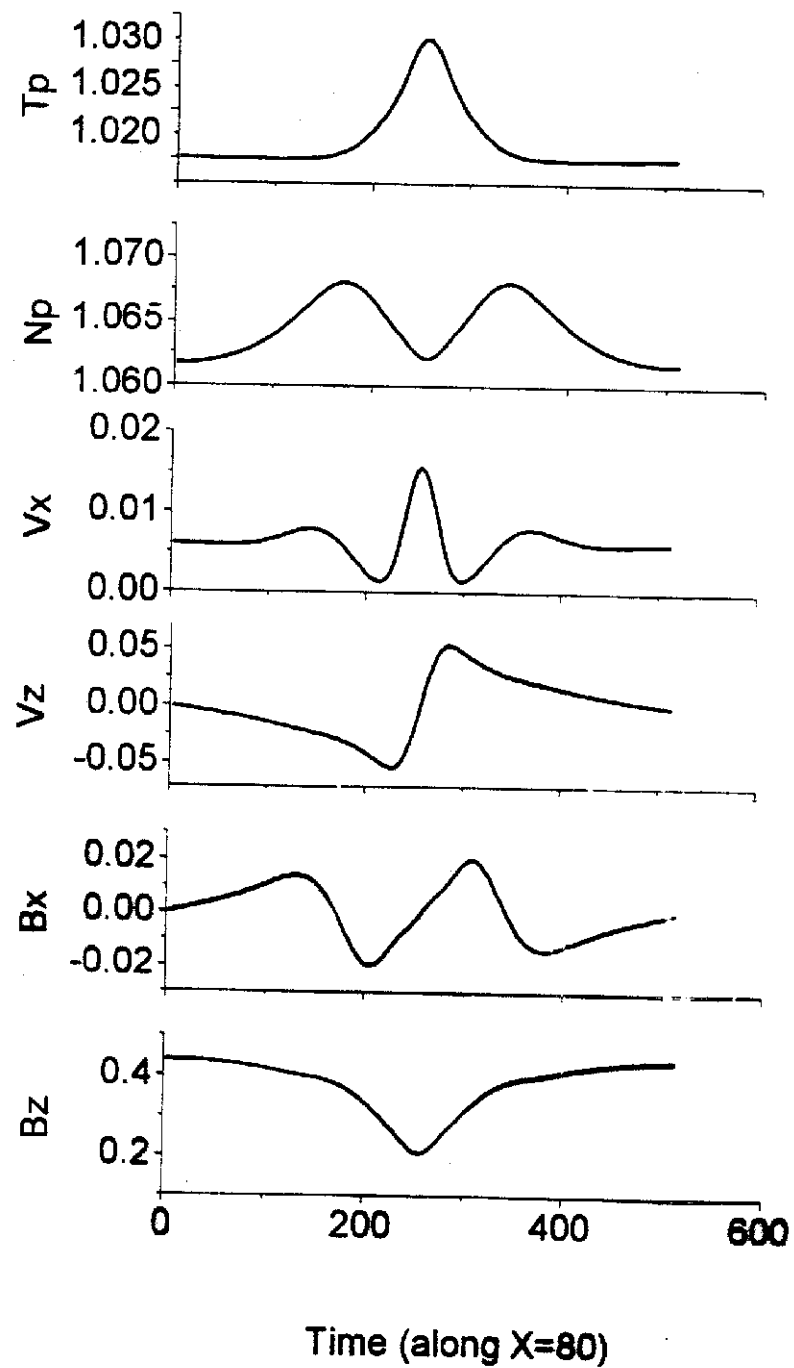


图5.4.9

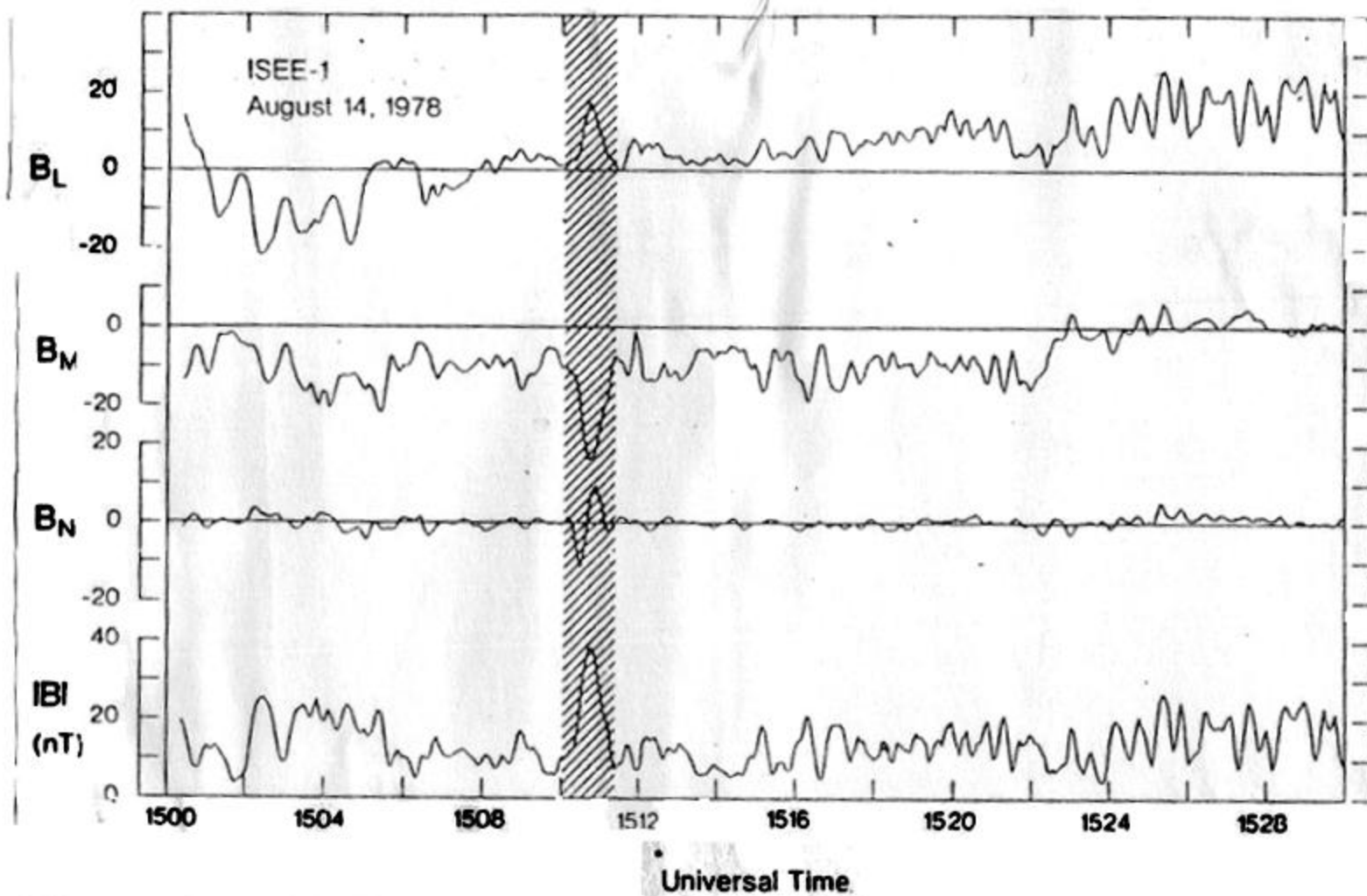


图3 法向磁场多双极结构的观测证据（摘自Berchem and Russell, 1984）

横向剪切流停止后，整个模拟区MHD系统处于非平衡态，此时没有外力作用，系统将趋向于平衡态。在这个过程中，场和等离子体结构完全与停止前不同，原非横向剪切流冲击边的高磁压会产生反向流。系统遭受内部反向横向剪切流冲击。由于反向冲击，“反K型”结构肯定要退化为X型结构。电流片位置也将向回移动，磁场位形在多种变化中逐渐恢复。等离子体逐渐把能量转移给电磁场。流场由准稳态定向流动逐渐变成低速湍流。流动的方向在不同区域的方向是不一样的，在不同的时间也是不一样的。此时，系统内部的各种不同类型的不稳定性将被激发。在系统内部的自身调节下，磁通量随等离子体流参与振荡。高重联率的重联类型向低重联率的重联类型过度。但低重联率的重联类型维持的时间可能较长，重联方式更多一些。这是由于不受外力控制后，自发磁场重联在内部受平行与磁场的剪切流和垂直于与磁场的剪切流诱导不断发生。外部横向剪切流停止后，内部流场就变成了主要因素。等离子体一方面参与振荡，一方面与磁场交换能量，在与磁场的非线性相互作用中，会产生涡旋性等离子体流场结构，这就增加了发生多个局部磁场重联的可能性。根据系统趋向平衡这一点，我们可以看到总的趋势是重联率越来越低。在实际的空间现象中，例如太阳风动压脉动对地球磁层的影响就可看成是一种剪切流对一个含有电流片特殊磁场区，冲击一段时间后又停止，使得磁层顶发生振荡，产生多处局部瞬变重联。这是由外部因素间接驱动磁场重联的具体表现。外力作用的突然停止，很可能是快速驱动磁场重联的一种机制，

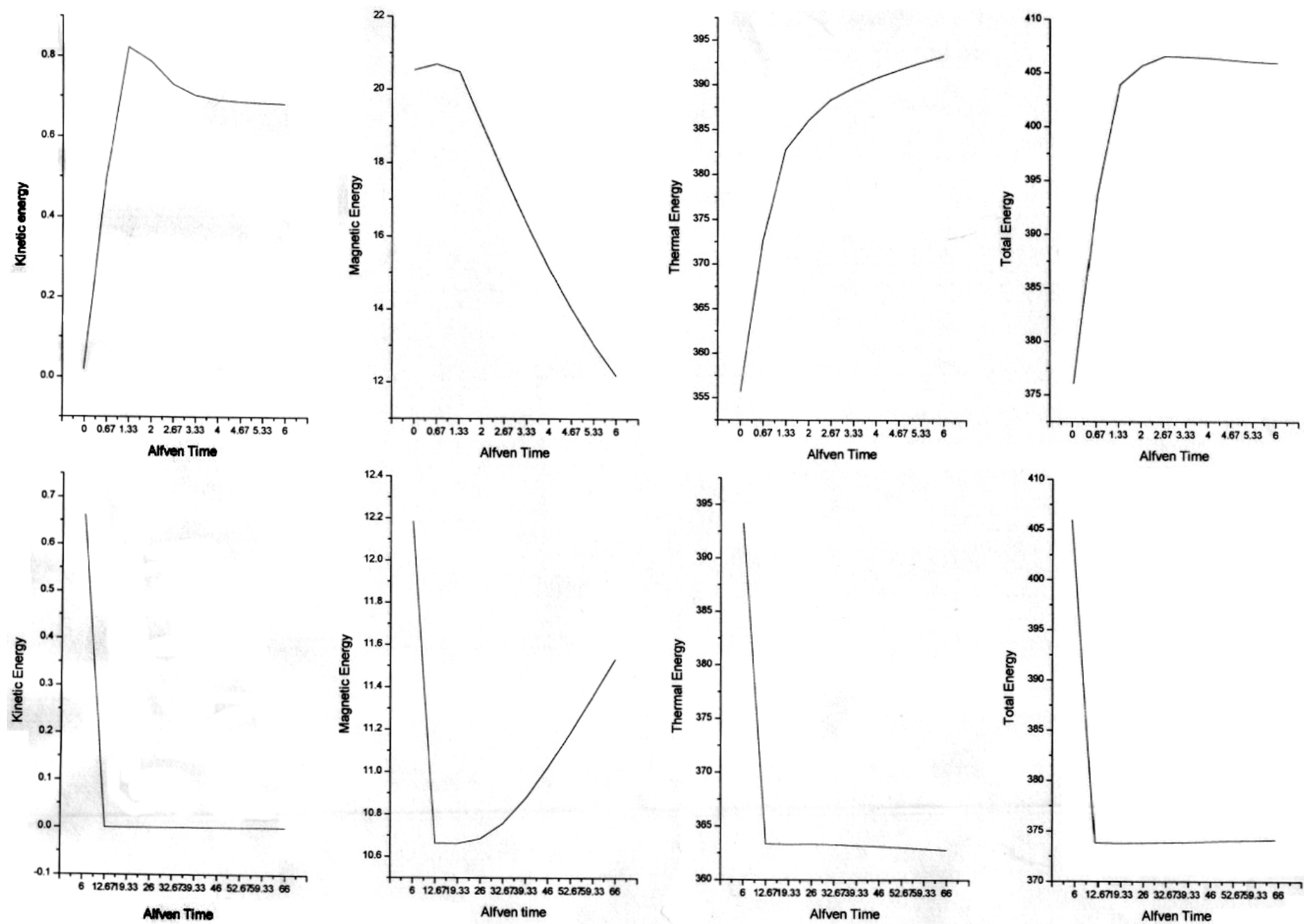


图 5 均匀流冲击（上排）和停止后的（下排）各种能量变化图。

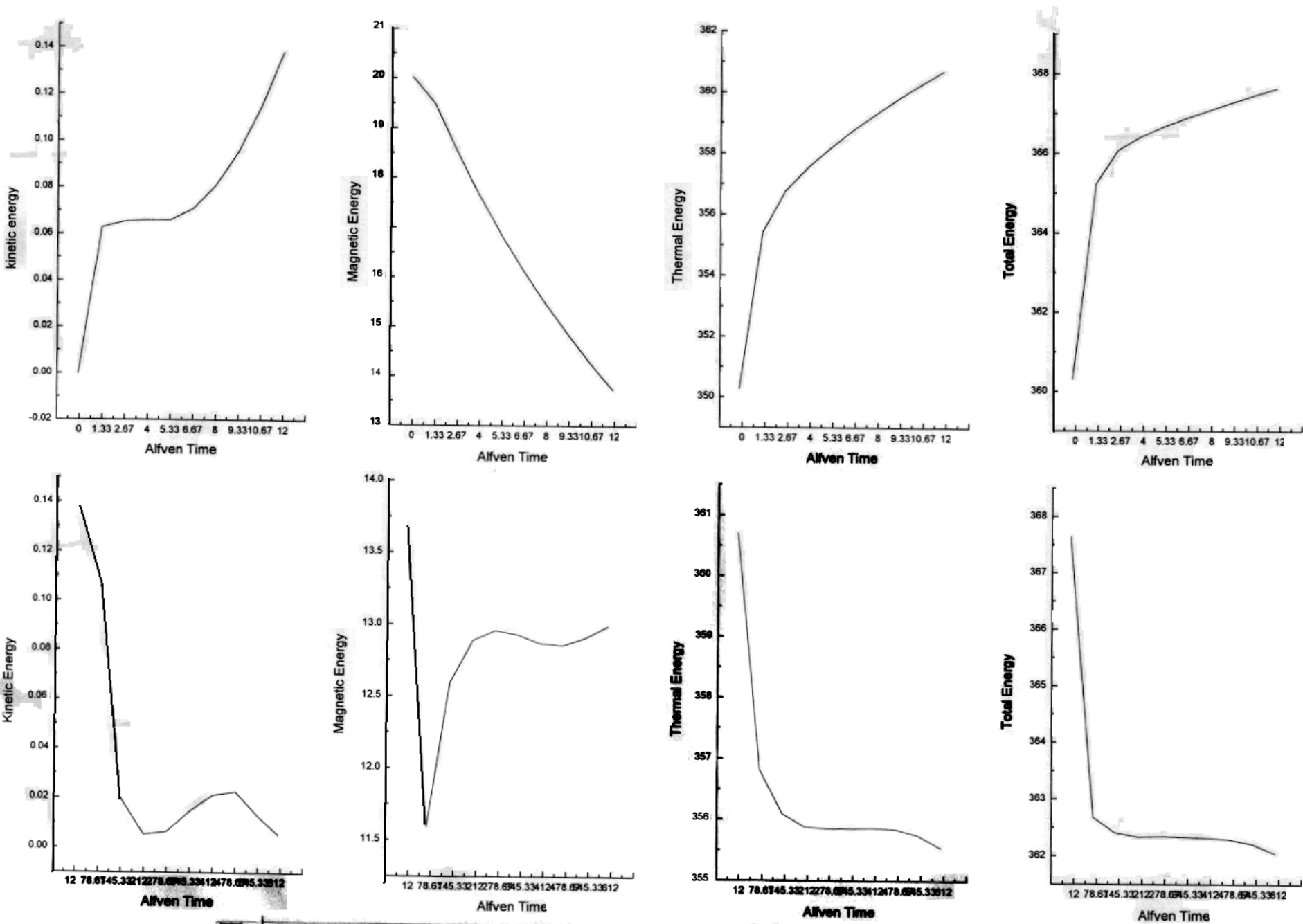


图 5 剪切流冲击（上排）和停止后的（下排）各种能量变化图。

外部剪切流停止后，电流片系统的磁场和等离子体的演化。发现在冲击时形成的“反K”型重联结构在停止后会逐渐退化为单X型结构。由于振荡，单X型结构和多X型结构交替出现，流场涡旋也相应地交替反向。在这个期间，总动能下降，总热能下降，总磁能先降后升，总能在下降一段后就保持守恒。经过较长时间，磁场结构能恢复到未受扰动前状态。

需要掌握的内容

什么是等离子体
判别条件
特性

单粒子轨道理论体系
基本概念
哪些特性

例如
拉摩尔 (**Larmor**) 频率
拉摩尔 (**Larmor**) 半径
引导中心
磁矩 μ 的表达式
漂移
电漂移速度
重力漂移
曲率漂移
梯度漂移
绝热不变量

磁流体动力论理论体系
基本概念
哪些特性

等离子体波的特性
阿尔芬波的表达式

间断面
激波
间断面与激波分类

等离子体不稳定性
增长率
等离子体不稳定性分类

动理论体系
基本概念
哪些特性

补充内容主要参考文献目录:

Lee, L., C., Z. F. Fu, 1986 , J. Geophysics. Res. 91, 6807

Liu, Z. X., Y. D. Hu:1988, Geophysics, Res. Lett. 15, 752

Chen, T., Z. X. Liu and X. X. Zhang, 1999 ,Physics of Plasmas , 6, 2393

阅读参考文献